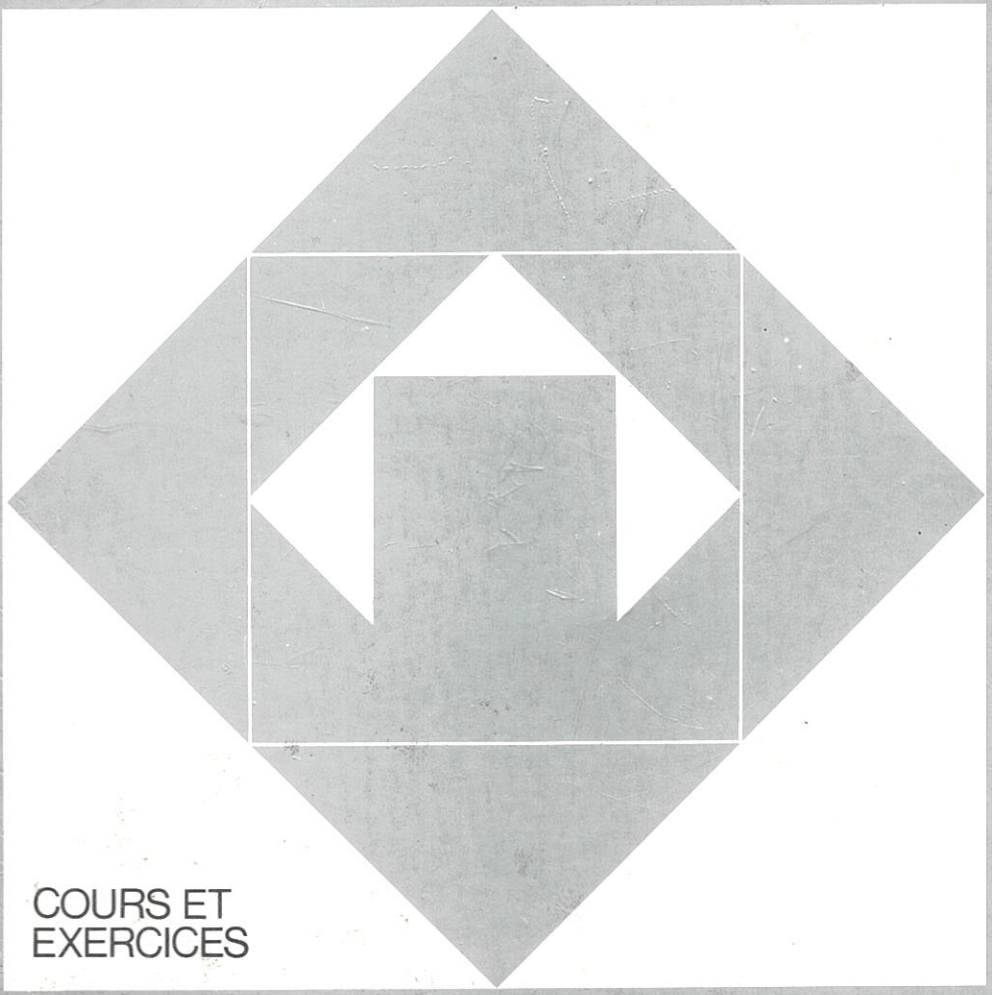
MATHEMATIQUES
3. ANALYSE

ELIE AZOULAY & JEAN AVIGNANT

ENSEIGNEMENT SUPERIEUR TECHNIQUE



COURS ET
EXERCICES

McGRAW-HILL

120-

MATHEMATIQUES
3. ANALYSE

Des mêmes auteurs (McGraw-Hill)

E. AZOULAY et J. AVIGNANT, ***Mathématiques :***

t. 1 : ***Analyse***
t. 2 : ***Analyse***
t. 4 : ***Algèbre***
t. 5 : ***Géométrie***

E. AZOULAY, ***Mathématiques, DEUG B :***

2 volumes

Autres ouvrages des auteurs (CDU et SEDES)

E. AZOULAY, *Cours résumé et exercices de mathématiques* à l'usage des étudiants de C.P.E.M., 1re année de pharmacie, préparation des concours AGRO, AGRI, etc., 8e éd.

E. AZOULAY, *Cours et exercices de mathématiques* à l'usage des étudiants de C.B. et B.G., 3e éd. *(épuisé)*.

E. AZOULAY et D. COHEN, *Cours et exercices de statistique* à l'usage des étudiants de C.P.E.M., C.B. et B.G. et 1re année de pharmacie, 9e éd.

E. AZOULAY et J. FRIED, *Mathématiques préparatoires aux sciences économiques :*

t. I : *Cours*, 3e éd. *(épuisé)*.
t. II : *Exercices corrigés*, 2e éd. *(épuisé)*.

E. AZOULAY, M. MESSERI, M. SERFATI, *Cours résumé et exercices de mathématiques :*

t. I : *Analyse* Première partie, 3e éd. *(épuisé)*.
t. II : *Analyse* Deuxième partie, 2e éd.
t. III : *Analyse* Troisième partie, 2e éd. *(épuisé)*
t. IV : *Algèbre* Première partie, 2e éd.
t. V : *Algèbre* Deuxième partie, 2e éd. *(épuisé)*
t. VI : *Géométrie* Première partie, 2e éd.
t. VII : *Géométrie* Deuxième partie *(épuisé)*

E. AZOULAY, M. MESSERI, M. SERFATI, *Problèmes de mathématiques* à l'usage des étudiants de M.P., P.C., Math. Sup., IUT *(épuisé)*.

ELIE AZOULAY
Ingénieur des Télécommunications
Professeur à l'Ecole Supérieure
d'Ingénieurs en Electrotechnique
et Electronique

JEAN AVIGNANT
Agrégé de l'Université
Professeur à l'I.U.T.
de Ville-d'Avray

MATHEMATIQUES
3. ANALYSE

COURS ET EXERCICES

McGRAW-HILL
Auckland - Beyrouth - Bogota - Hambourg - Johannesburg
Lisbonne - Londres - Madrid - Mexico - Montréal
New Delhi - New York - Panama - Paris - San Juan
São Paulo - Singapour - Sydney - Tokyo - Toronto
1984

Maquette de couverture : Françoise Rojare

Copyright © 1984 by McGraw-Hill, Paris

ISBN : 2-7042-1088-8

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans le but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faites sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'Article 40). Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code pénal.

McGraw-Hill — 28 Rue Beaunier — 75014 Paris

AVANT-PROPOS

L'ouvrage que nous présentons ici s'adresse aux étudiants des écoles supérieures techniques, des I.U.T. et aux élèves de certaines écoles d'ingénieurs — celles en particulier pour lesquelles le passage traditionnel par les classes de mathématiques spéciales n'est pas requis — ainsi qu'aux étudiants du premier cycle universitaire.

L'enseignement des Mathématiques a beaucoup évolué durant les dernières décennies. Un formalisme plus rigoureux, des concepts plus généraux et de ce fait plus souvent abstraits se sont imposés. Il demeure cependant un domaine où une attention toute particulière doit être apportée à la pédagogie des mathématiques, c'est celui des enseignements à finalité technique. Dans de tels cas, l'axiomatique rigoureuse, le concept général et abstrait cèdent nécessairement le pas au souci de doter l'élève des moyens utiles à faire rapidement usage d'un certain nombre « d'outils mathématiques » lui permettant d'appréhender, par le biais de modèles appropriés, les notions techniques qui constituent l'essentiel de sa formation. D'ailleurs, nos étudiants sont ceux qui ressentent le plus l'ennui des Mathématiques telles qu'elles sont enseignées aujourd'hui. De celles parfaitement agencées de l'enseignement secondaire aux superbes théories de l'enseignement supérieur, le tout constitue peut-être un merveilleux édifice sans faille, à cela près qu'il finit souvent par inspirer morosité et ennui.

Notre choix a été celui d'un formalisme restreint que nous croyons être le plus adéquat et le plus apprécié. Nous avons cependant évité de prendre des libertés quant à la rigueur, et de ce fait, tenu à donner les démonstrations de la plupart des théorèmes et formules, n'omettant délibérément, dans un souci d'allégement, que certaines jugées trop complexes.

Chaque chapitre est suivi d'un résumé et de très nombreux exercices, certains entièrement résolus, d'autres comportant seulement la réponse avec des indications sur la méthode, ceci en particulier à l'usage des autodidactes et des étudiants de formation continue.

Le premier tome reprend les notions de base d'analyse acquises en terminale, qu'il complète et développe concernant les fonctions d'une variable réelle et les fonctions transcendantes usuelles. Il se poursuit par les chapitres consacrés à la notion d'intégrale, aux procédés classiques de

recherche de primitives, et enfin à l'extension de la notion d'intégrale. Un dernier chapitre porte sur les fonctions de plusieurs variables dont les résultats seront fréquemment mis à profit dans les tomes suivants.

Le tome 2 complète le précédent pour couvrir l'essentiel de l'analyse du premier cycle. On y trouve les équations différentielles, les intégrales multiples, l'intégrale curviligne, les formules intégrales d'analyse vectorielle ainsi que l'étude des suites et séries (numériques et de fonctions).

Le tome 3 d'analyse aborde les compléments traités au niveau du second cycle, tant dans les écoles d'ingénieurs qu'à l'université, des Mathématiques de la Physique et de la technique : fonctions eulériennes, transformations de Laplace et de Fourier, fonctions de Bessel, fonctions spéciales, équations aux dérivées partielles, fonctions d'une variable complexe, etc.

Le tome 4 rassemble les notions classiques d'algèbre, l'algèbre linéaire ainsi que certaines applications à l'analyse et à la géométrie.

Le tome 5 est celui de la géométrie tant analytique qu'infinitésimale : calculs et opérateurs vectoriels, droites et cercles, coniques et quadriques, fonctions vectorielles d'une variable réelle, courbes planes paramétrées, courbes en polaires et, enfin, courbure et torsion et enveloppes des courbes planes et gauches.

Il est évident que le plan suivi n'est pas nécessairement celui des cours tels qu'ils se déroulent chronologiquement et, de ce fait, de nombreux renvois d'un tome à l'autre ont été indispensables.

Les auteurs remercient par avance le lecteur des critiques ou suggestions qu'il voudra bien leur formuler ainsi que les Editions McGraw-Hill pour le soin qu'elles ont apporté à la réalisation de cet ouvrage.

Jean AVIGNANT
Elie AZOULAY

TABLE DES MATIÈRES

1. Fonctions définies par des intégrales. Fonctions eulériennes 1
A. Fonctions définies par des intégrales 1
1. Fonction $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 1
2. Fonction $\varphi(x) = \int_a^b f(x, t)\,dt$ 2
3. Fonction $\varphi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t)\,dt$ 4
4. Fonction définie par une intégrale généralisée. Convergence uniforme 4
5. Propriétés des fonctions définies par des intégrales uniformément convergentes 5
6. Second théorème de la moyenne 7
B. Fonctions eulériennes 8
1. Définitions 8
2. Relation de récurrence de la fonction Γ 9
3. Etude de la fonction $y = \Gamma(x)$ 10
4. Prolongement de $\Gamma(x)$ aux valeurs négatives de x 12
5. Relation entre les fonctions Γ et B 12
6. Formule des compléments 13
7. Intégrales de Wallis. Formule de duplication pour la fonction Γ 15
8. Formule de Stirling 16
Résumé du chapitre 1 18
Exercices 21

2. Fonctions d'une variable complexe 37
A. Généralités. Fonctions holomorphes 37
1. Définitions 37
2. Limites. Continuité 38
3. Dérivée d'une fonction en un point. Dérivées successives. Fonction holomorphe 39
4. Transformation conforme définie par une fonction holomorphe 40
5. Conditions de Cauchy 42
6. Fonctions harmoniques conjuguées 45
7. Différentielle d'une fonction 46

B. Fonctions holomorphes élémentaires. Fonctions analytiques . . . 47
1. Fonctions rationnelles . . . 47
2. Fonction $f(z) = \frac{1}{z}$. Abaque de Smith . . . 47
3. Fonction homographique . . . 49
4. Transformation de Joukovski . . . 51
5. Fonction définie par une série entière. Fonction analytique . . 53
6. Fonctions usuelles définies par des séries entières . . . 55
7. Fonction logarithmique. Notion de coupure . . . 56
8. Autres fonctions classiques . . . 60
C. Intégration dans le champ complexe. Théorème de Cauchy . . . 61
1. Définition de l'intégration sur un arc . . . 61
2. Propriétés de l'intégration . . . 63
3. Intégration d'une fonction holomorphe. Théorème de Cauchy 64
4. Primitives d'une fonction holomorphe . . . 66
5. Formule intégrale de Cauchy . . . 67
6. Série de Taylor d'une fonction holomorphe . . . 68
D. Théorie des résidus . . . 70
1. Pôles d'une fonction. Fonction méromorphe . . . 70
2. Partie principale et résidu d'une fonction méromorphe en un pôle . . . 71
3. Forme intégrale du résidu d'une fonction méromorphe . . . 73
4. Théorème des résidus pour une fonction méromorphe . . . 73
5. Point singulier essentiel. Série de Laurent . . . 75
6. Généralisation du théorème des résidus . . . 78
E. Application de l'intégration dans le champ complexe au calcul de certaines intégrales réelles . . . 79
1. Calcul de $\int_0^{2\pi} \varphi(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$, φ étant rationnelle . . . 79
2. Lemmes de Jordan . . . 80
3. Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}$, $\alpha > 1$ . . . 80
4. Calcul d'intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$, P et Q étant des polynômes . . . 83
5. Calcul d'intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix}\, dx$ . . . 84
6. Autres intégrales classiques . . . 86
Résumé du chapitre 2 . . . 88
Exercices . . . 92

3. Transformation de Fourier . . . **105**
1. Introduction . . . 105
2. Définition de la transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ . . 105
3. Formules de réciprocité de Fourier . . . 106

4. Propriétés de la transformation de Fourier 109
5. Produit de convolution 110
6. Transformées de quelques fonctions simples 111
7. Applications de la transformation de Fourier 112
8. Formules de Parseval et de Plancherel 112
Résumé du chapitre 3 113
Exercices 114

4. Transformation de Laplace. Calcul symbolique **125**
A. Définitions et généralités 125
1. Introduction 125
2. Définitions et notations 125
3. Etude de la convergence 126
4. Transformation inverse. Formule de Bromwich 128
5. Premiers exemples. Fonction échelon-unité 129
6. Linéarité. Applications 130
7. Translation sur t (formule du retard). Fonction périodique . 130
8. Translation sur p 133
9. Homothétie sur t ou sur p 133
10. Dérivation et intégration de l'original 133
11. Dérivation et intégration de l'image 134
B. Transformées usuelles. Recherche d'un original 136
1. Fonctions se ramenant aux exponentielles ou aux polynômes 136
2. Transformée de t^α 136
3. Produit de convolution. Original d'un produit 137
4. Distribution ou « fonction » de Dirac 138
5. Transformée d'une série entière 140
6. Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale 140
7. Recherche d'un original 141
C. Applications du calcul symbolique 143
1. Résolution d'équations fonctionnelles 143
2. Equations et systèmes différentiels linéaires à coefficients constants 143
3. Equations différentielles linéaires dont les coefficients sont des polynômes 145
Résumé du chapitre 4 146
Exercices 148

5. Fonctions de Bessel **163**
1. Introduction. Equation de Bessel 163
2. Fonction $J_0(t)$ 165
3. Etude de l'équation de Bessel dans le cas général 167
4. Equation de Bessel d'ordre entier 170
5. Relations « de récurrence » sur les fonctions de Bessel 171

6. Forme intégrale d'une fonction de Bessel d'ordre entier 172
7. Interprétation de $J_k(t)$ par une série de Fourier. Fonction génératrice 173
8. Transformée de Laplace d'une fonction de Bessel 174
9. Orthogonalité. Relations concernant les zéros des fonctions de Bessel 176
Résumé du chapitre 5 179
Exercices 181

6. Notions sur quelques autres fonctions spéciales de l'analyse 185
1. Introduction 185
2. Compléments sur les équations différentielles linéaires. Théorème de Fuchs 185
3. Fonctions orthogonales. Polynômes orthogonaux 186
4. Equation et fonctions hypergéométriques 188
5. Equation de Legendre. Fonctions et polynômes de Legendre 189
6. Polynômes d'Hermite 193
7. Polynômes de Laguerre 194
8. Polynômes de Tchebychev 195
9. Polynômes et nombres de Bernoulli 198
10. Autres fonctions classiques 200
11. Intégrales et fonctions elliptiques 201
Résumé du chapitre 6 204
Exercices 207

7. Equations aux dérivées partielles 217
A. Introduction et généralités 217
B. Equations aux dérivées partielles du premier ordre 218
1. Généralités 218
2. Systèmes différentiels. Intégrales premières 219
3. Equation aux dérivées partielles associée à un système différentiel linéaire 220
4. Equation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre ... 220
5. Cas de la dimension 2. Problème de Cauchy 223
6. Equations aux différentielles totales 224
7. Notions sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaires, à deux variables 225
C. Equations aux dérivées partielles linéaires du second ordre 228
1. Généralités. Problème de Cauchy 228
2. Equation linéaire où les coefficients A, B, C ne dépendent que de x et y 229
3. Etude de l'équation $Ar + Bs + Ct = 0$ à coefficients constants 230
D. Etude de quelques équations aux dérivées partielles de la physique 232
1. Introduction et généralités 232

2. Equation des cordes vibrantes 233
3. Equation de Laplace 236
4. Equation des ondes 242
5. Equations de Maxwell. Equation des télégraphistes 244
6. Equation de la chaleur 247
7. Conclusion 248
Résumé du chapitre 7 248
Exercices 249

CHAPITRE 1

FONCTIONS DÉFINIES PAR DES INTÉGRALES. FONCTIONS EULÉRIENNES

A. FONCTIONS DÉFINIES PAR DES INTÉGRALES

Nous avons déjà rencontré des intégrales définies contenant un ou plusieurs paramètres, elles sont alors fonctions de ces paramètres. Même (et surtout) lorsque le calcul effectif d'une telle intégrale n'est pas possible, on introduit ainsi, comme on l'a fait à partir des séries, de nouvelles fonctions. Nous allons examiner les différentes formes que peuvent présenter ces fonctions, ainsi que leurs propriétés éventuelles : limites, continuité, dérivabilité, intégrabilité.

1. Fonction $\varphi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

f étant intégrable sur un domaine $\mathbb{D}$ de $\mathbb{R}$, a un nombre fixe de $\mathbb{D}$, l'intégrale $\varphi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est une fonction définie sur $\mathbb{D}$. Elle est continue, et en outre dérivable si f est continue. On a vu (tome 1) que sa dérivée n'est autre que $f(x)$. Quelques fonctions classiques peuvent ainsi être définies.

le **sinus intégral** de x, noté Si x, défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{Si } x=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt, \text{ de dérivée } (\text{Si } x)'=\frac{\sin x}{x}$$

le **cosinus intégral** de x, noté Ci x, défini sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\text{Ci } x=\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt, \text{ de dérivée } (\text{Ci } x)'=-\frac{\cos x}{x}$$

(avec variante de signe suivant les auteurs).

Ces fonctions ne posent pas de problèmes majeurs. Certaines peuvent aussi être représentées par des séries, il est facile par exemple de vérifier que

$$\text{Si } x=\sum_{0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \qquad \text{(rayon de convergence infini)}$$

2. Fonction $\varphi(x)=\int_a^b f(x,t)\,dt$

Cette fonction est manifestement définie sur tout domaine $\mathbb{D}$ tel que pour tout (x, t) de $\mathbb{D}\times[a, b]$, $f(x, t)$ soit intégrable par rapport à t.

Examinons pour $\varphi(x)$ **d'autres propriétés** éventuelles.

a) Supposons $f(x, t)$ continue par rapport à x et t sur $\mathbb{D}\times[a, b]$. Voyons si $\varphi(x)$ est continue en un point x de $[a, b]$: on a

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\int_a^b [f(x+h, t)-f(x, t)]\,dt$$

et, en supposant $a<b$

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)|\leqslant\int_a^b |f(x+h, t)-f(x, t)|\,dt$$

Or $\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\alpha(t)>0$, tel que

$$|h|<\alpha(t) \Longrightarrow |f(x+h, t)-f(x, t)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

En prenant $|h|<\beta$, β étant le minimum de $\alpha(t)$ quand t décrit $[a, b]$, on réalise $|\varphi(x+h)-\varphi(x)|<\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt=\varepsilon$. On en conclut que $\varphi(x)$ est continue sur $\mathbb{D}$.

b) Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ existe et est une fonction continue de x et t sur $\mathbb{D}\times[a, b]$, voyons si $\varphi(x)$ est dérivable sur $\mathbb{D}$:

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\int_a^b h\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, t)\,dt \qquad \text{avec } \theta\in\,]0, 1[$$

d'après le théorème des accroissements finis appliqué sur la variable x.

Donc $\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h, t)\,dt$

Quand h tend vers 0, θh tend vers 0 et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h,\ t) \longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)$, d'après la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, on peut donc, en raisonnant comme dans (a), rendre $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h,\ t)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$, $\forall t\in[a,\ b]$, pourvu que h soit suffisamment petit, donc

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \longrightarrow \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)\,\mathrm{d}t$$

φ est donc dérivable sur $\mathbb{D}$, et sa dérivée peut s'obtenir par la formule de **dérivation sous le signe** $\int$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x,\ t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)\,\mathrm{d}t}$$

c) En revenant à la seule hypothèse de continuité de f sur $\mathbb{D}\times[a,\ b]$, $f(x,\ t)$ est intégrable sur le rectangle

$$\Delta(\alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ a\leqslant t\leqslant b), \qquad \forall[\alpha,\ \beta]\subset\mathbb{D}$$

et $$\iint_\Delta f(x,\ t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}x\int_a^b f(x,\ t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b \mathrm{d}t\int_\alpha^\beta f(x,\ t)\,\mathrm{d}x$$

d'où la formule d'**intégration sous le signe** $\int$:

$$\boxed{\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,\ t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x,\ t)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t}$$

Exemple.

Soit $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x^2+t^2}=\frac{1}{x}\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x}$, définie si $x\neq 0$.

On a
$$\varphi'(x)=\int_0^1 \frac{-2x}{(x^2+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{x^2}\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x}-\frac{1}{x(1+x^2)}$$

on en déduit que, pour $x\neq 0$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t^2)^2}=\frac{1}{2x^3}\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2(1+x^2)}$$

ce que l'on peut vérifier directement à l'aide du changement de variable $t=x\ \mathrm{tg}\ u$.

3. Fonction $\varphi(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(x, t)\,\mathrm{d}t$

Une telle fonction est définie sur un domaine $\mathbb{D}$ tel que $\forall x \in \mathbb{D}$, f est intégrable par rapport à t sur $[a(x), b(x)]$.

En supposant $a(x)$ et $b(x)$ dérivables sur $\mathbb{D}$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ continue sur le domaine décrit par (x, t), on peut établir en cherchant $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}$ la **formule** dite **de Leibniz** qui généralise la dérivation sous le signe $\int$

$$\varphi'(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t + f[x, b(x)]\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} - f[x, a(x)]\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x}$$

formule d'un intérêt pratique limité.

4. Fonction définie par une intégrale généralisée. Convergence uniforme

Ce cas est extrêmement fréquent, notamment sous la forme

$$\varphi(x)=\int_{a}^{+\infty} f(x, t)\,\mathrm{d}t \qquad (1)$$

la seule que nous étudierons en détail. Il sera facile d'adapter ce qui suit au cas d'une fonction de la forme $\int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}t$, où f est infinie en $t=b$ (ou en $t=a$, ou les deux).

Le cas d'une fonction de la forme (1) pose des problèmes comparables à ceux rencontrés à propos des fonctions définies par des séries : il ne suffit pas, par exemple, que f ait une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continue pour que φ soit dérivable, ainsi $\varphi(x)=\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(tx)}{t}\,\mathrm{d}t$, qui est définie sur $\mathbb{R}$ (pour $x>0$, le changement de variable $tx=u$ la ramène à $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ déjà étudiée) n'a pas pour dérivée $\int_0^{+\infty} \cos(tx)\,\mathrm{d}t$, puisque cette intégrale est divergente et que, d'ailleurs, $\varphi'(x)=0$ pour $x>0$.

Nous allons donc, comme pour les séries, introduire la notion de convergence uniforme.

• Rappelons tout d'abord que la **convergence simple** de l'intégrale $\varphi(x)$, sur un domaine $\mathbb{D}$, équivaut à l'existence, pour tout ε positif, et pour tout x de $\mathbb{D}$, d'un nombre T_1, dépendant de ε et de x, tel que

$$T > T_1 \Longrightarrow \left|\varphi(x) - \int_a^T f(x, t)\,dt\right| < \varepsilon \quad \text{ou} \quad \left|\int_T^{+\infty} f(x, t)\,dt\right| < \varepsilon$$

• Nous dirons que l'intégrale $\varphi(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{D}$ (ou sur une partie Δ de $\mathbb{D}$) si on peut trouver un nombre T_0 **ne dépendant que de ε** tel que

$$T > T_0(\varepsilon) \Longrightarrow \left|\int_T^{+\infty} f(x, t)\,dt\right| < \varepsilon \quad \forall x \in \Delta$$

Il va de soi que la convergence uniforme implique la convergence simple, et que le passage de la convergence simple à la convergence uniforme équivaut à l'existence d'un $T_0(\varepsilon) = \sup_{x \in \Delta} T_1(\varepsilon, x)$.

• Comme pour les séries de fonctions, une condition suffisante, mais non nécessaire de convergence uniforme, est la **convergence normale** que nous définissons ainsi : l'intégrale $\varphi(x) = \int_a^{+\infty} f(x, t)\,dt$ est normalement convergente s'il existe une fonction positive $g(t)$ définie sur $[a, +\infty[$, telle que $\forall x \in \Delta$, $\forall t \geqslant a$, $|f(x, t)| \leqslant g(t)$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge.

En effet pour que $\left|\int_T^{+\infty} f(x, t)\,dt\right| < \varepsilon$, il suffit que $\int_T^{+\infty} g(t)\,dt < \varepsilon$, ce qui exige $T > T_0$, ce T_0 ne dépendant que de ε, et non de x, puisque g ne contient pas x.

Par exemple, l'intégrale $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1 + t^2 + x^2}\,dt$ est normalement convergente, donc uniformément convergente, sur $\mathbb{R}$, car

$$\left|\frac{\cos(tx)}{1 + t^2 + x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1 + t^2} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} \text{ converge.}$$

5. Propriétés des fonctions définies par des intégrales uniformément convergentes

Ces propriétés sont, à des nuances d'écriture près, les mêmes que celles des fonctions définies par des séries uniformément convergentes.

— Supposons $f(x, t)$ continue par rapport à (x, t) pour tout $t \geqslant a$ et pour tout x d'un intervalle fermé Δ, et de plus supposons $\int_a^{+\infty} f(x, t)\,dt$

uniformément convergente sur Δ. Voyons si $\varphi(x)=\int_a^{+\infty} f(x, t)\,dt$ est continue sur Δ.

Il suffit d'écrire :

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\int_a^{+\infty}[f(x+h, t)-f(x, t)]\,dt$$

$$=\int_a^{T}[f(x+h, t)-f(x, t)]\,dt+\int_T^{+\infty} f(x+h, t)\,dt-\int_T^{+\infty} f(x, t)\,dt$$

Si nous désignons ces trois intégrales par I_1, I_2, I_3, nous avons

$$|\varphi(x+h, t)-\varphi(x, t)|\leqslant|I_1|+|I_2|+|I_3|$$

D'après la convergence uniforme, pour tout ε positif donné, il existe un $T_0(\varepsilon)$, indépendant de x, tel que

$$T>T_0 \implies |I_3|<\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |I_2|<\frac{\varepsilon}{3} \quad (\text{ceci } \forall h)$$

T étant ainsi choisi, d'après la continuité de f et de son intégrale sur $[a, T]$ (paragraphe 2 (a) ci-dessus), il existe un α positif tel que

$$|h|<\alpha \implies |I_1|<\frac{\varepsilon}{3},$$

on a alors $|\varphi(x+h)-\varphi(x)|<\varepsilon$ φ est donc continue.

Nous en concluons :

• Si $\varphi(x)=\int_a^{+\infty} f(x, t)\,dt$ est uniformément convergente sur l'intervalle fermé Δ et si $f(x, t)$ est continue pour tout $(x, t)\in\Delta\times[a, +\infty[$, $\varphi(x)$ est continue sur Δ.

On démontre d'une façon analogue les deux propriétés suivantes :

• Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ existe et est continue par rapport à (x, t) pour tout $(x, t)\in\Delta\times[a, +\infty[$, si $\int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,dt$ est uniformément convergente sur Δ, et si $\int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t)\,dt$ est convergente pour un certain x_0 de Δ, alors $\varphi(x)=\int_a^{+\infty} f(x, t)\,dt$ est dérivable et sa dérivée est

$$\varphi'(x)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,dt$$

(dérivation sous le signe $\int$).

• Si $\varphi(x)=\int_a^{+\infty} f(x, t)\,dt$ est uniformément convergente sur Δ et si $f(x, t)$ est continue sur $\Delta\times[a, +\infty[$, $\varphi(x)$ est intégrable sur tout segment $[\alpha, \beta]$ de Δ, et on a

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x, t)\,dx\right)dt$$

(intégration sous le signe $\int$).

Observons, pour conclure, que même en l'absence de toutes les hypothèses des théorèmes précédents, il arrive que $\varphi(x)$ soit continue, dérivable ou intégrable : il faut alors faire un raisonnement direct, parfois en utilisant le second théorème de la moyenne (paragraphe ci-dessous).

6. Second théorème de la moyenne

Rappelons le premier théorème de la moyenne (t. 1, chap. 8, paragraphe 5) :

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont continues sur $[a, b]$ et si $g(x)$ a un signe constant, il existe $c\in]a, b[$ tel que $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx$.

Envisageons une autre transformation de $I=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ en supposant ici $f(x)$, $g(x)$ et $g'(x)$ continues sur $[a, b]$, et $g'(x)\leqslant 0$ sur $[a, b]$. Nous supposons aussi $a<b$.

Posons $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, ainsi F est continue, $F(a)=0$, et $F'(x)=f(x)$.

On peut transformer I en intégrant par parties

$$I=\int_a^b g(x)\,F'(x)\,dx=\Big[g(x)\,F(x)\Big]_a^b-\int_a^b F(x)\,g'(x)\,dx$$

$$=g(b)\,F(b)-F(c)\int_a^b g'(x)\,dx \text{ avec } c\in]a, b[$$

d'après le premier théorème de la moyenne (g' étant de signe constant).

Donc $I=g(b)\,F(b)-F(c)[g(b)-g(a)]$

$$=g(b)[F(b)-F(c)]+g(a)[F(c)-F(a)]$$

puisque $F(a)=0$. Enfin

$$I=g(a)\int_a^c f(x)\,dx+g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Cette formule, et nous l'admettrons, reste valable dans des conditions moins restrictives que celles de la démonstration qui précède. Précisément, le second théorème de la moyenne peut s'énoncer ainsi :

• Si $f(x)$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$, avec $a<b$, si $g(x)$ est une fonction non croissante sur $[a, b]$, il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx$$

• Cas particulier : $f(x)=1$

$$\int_a^b g(x)\,dx = (c-a)\,g(a)+(b-c)\,g(b)$$

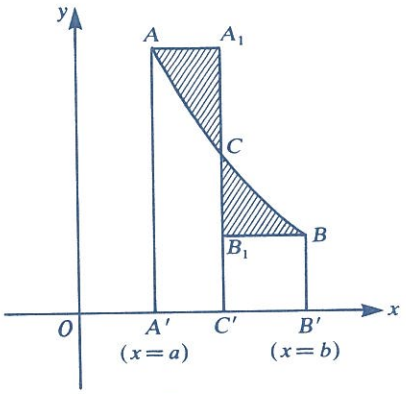


Figure 1.

Ceci s'interprète graphiquement (fig. 1) :
C étant le point d'abscisse c sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$

$$\text{aire}(A'B'BA) = \text{aire}(A'C'A_1A) + \text{aire}(C'B'BB_1),$$

donc $$\text{aire}(ACA_1) = \text{aire}(B_1BC)$$

B. FONCTIONS EULÉRIENNES

1. Définitions

a) Fonction eulérienne de première espèce $B(x, y)$

x et y étant des réels, soit l'intégrale $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$.

Lorsque $t \longrightarrow 0^+$ $\quad f(t)=t^{x-1}(1-t)^{y-1} \sim \dfrac{1}{t^{1-x}}$

l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt$ a un sens si et seulement si $1-x<1$, soit $x>0$.

Lorsque $t \longrightarrow 1^-$ $f(t) \sim \dfrac{1}{(1-t)^{1-y}}$

l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,dt$ a un sens si et seulement si $1-y<1$, soit $y>0$.

Ainsi, pour tout couple (x, y) de nombres strictement positifs, on peut définir la **fonction bêta**

$$\boxed{B(x, y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt}$$

Le changement de variable $t=1-u$ permet de montrer que

$$B(y, x)=B(x, y)$$

b) Fonction eulérienne de seconde espèce $\Gamma(x)$ **(fonction gamma)**
On la définit par l'intégrale

$$\boxed{\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt}$$

Lorsque $t \longrightarrow 0^+$ $\varphi(t)=t^{x-1}e^{-t} \sim \dfrac{1}{t^{1-x}}$

$\displaystyle\int_0^1 \varphi(t)\,dt$ n'a de sens que si $x>0$.

Lorsque $t \longrightarrow +\infty$ $0<\varphi(t)<\dfrac{1}{t^2}$ car $e^t>t^{x+1}$ pour t assez grand $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,dt$ est donc convergente pour tout x réel.

On voit que $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ est définie pour $x>0$.

2. Relation de récurrence de la fonction Γ

Soit $x>0$, intégrons par parties $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty,} e^{-t}\cdot t^{x-1}\,dt$

avec $e^{-t}=u$, $t^{x-1}\,dx=dv$ il vient

$$\Gamma(x)=\left[e^{-t}\cdot\frac{t^x}{x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{x}e^{-t}\,dt=\frac{1}{x}\Gamma(x+1)$$

$\left(\text{car } \dfrac{t^x}{e^t} \longrightarrow 0 \text{ pour } t \longrightarrow +\infty\right)$

D'où la **relation** dite **de récurrence**

$$\boxed{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)} \qquad (2)$$

Elle montre que les valeurs de Γ sur un intervalle de longueur 1, par exemple $[1, 2]$, déterminent les valeurs en un point x quelconque de $]0, +\infty[$.

La relation (2), pour $x = n \in \mathbb{N}^*$, donne

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n!\,\Gamma \qquad (2)$$

Or $$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1,$$

il en résulte que $\Gamma(n+1) = n!$, pour tout entier $n > 0$. Comme on sait que $0! = 1$ $\mathbf{\Gamma(n+1) = n!}$ est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

On voit que la fonction Γ « prolonge » aux valeurs non entières la notion de factorielle. On emploie d'ailleurs aussi la notation $x!$ pour désigner $\Gamma(x+1)$ même si x n'est pas entier. On voit que

$$x! = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt \quad \text{est définie sur }]-1, +\infty[$$

(valeurs données par la touche $x!$ dans certaines calculatrices).

3. Étude de la fonction $y = \Gamma(x)$

En écrivant $\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\,dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$, et en majorant pour t « grand » $t^{x-1} e^{-t}$ par $\dfrac{1}{t^2}$, on voit que la seconde intégrale est normalement, donc uniformément, convergente sur $\mathbb{R}$. Dans la première intégrale, on peut majorer $t^{x-1} e^{-1}$ par t^{a-1} si $x \geqslant a > 0$, lorsque $t \longrightarrow 0^+$, cette intégrale est donc normalement et uniformément convergente sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$. Comme $\varphi(t) = t^{x-1} e^{-t}\,dt$ est une fonction continue sur $[a, +\infty[$, $\Gamma(x)$ est continue sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$.

Quand $x \longrightarrow 0^+$ $\quad \Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \dfrac{1}{x}$

puisque $\Gamma(x+1) \longrightarrow \Gamma(1) = 1$, donc $\Gamma(x) \longrightarrow +\infty$.

On pourrait, de façon analogue, démontrer que les intégrales obtenues en dérivant Γ deux fois successivement sous le signe $\int$ convergent uniformément sur $[a, +\infty[$, ce qui légitime ces dérivations, donc on a

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln t \cdot e^{-t}\,dt$$

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} (\ln t)^2 \cdot e^{-t}\,dt$$

$t^{x-1} (\ln t)^2 e^{-t}$ étant positive, $\Gamma''(x)$ l'est aussi.

$\Gamma'(x)$ est donc une fonction croissante et s'annule au plus une fois. Or $\Gamma(1) = 0! = 1$ et $\Gamma(2) = 1! = 1$, le théorème de Rolle permet donc d'affirmer que sur $]1, 2[$ il existe au moins une valeur c telle que $\Gamma'(x) = 0$.

Cette valeur c est donc la seule racine de l'équation $\Gamma'(x)=0$, elle correspond à un minimum de Γ. Précisément on a établi que

$$c \simeq 1{,}46, \quad \Gamma(c) \simeq 0{,}885\,6 \quad (*)$$

Enfin, $\Gamma(x)$ étant croissante sur $[c, +\infty[$, on a, si $n \leqslant x < n+1$ $n \in \mathbb{N}$ et x assez grand

$$\Gamma(n) \leqslant \Gamma(x) < \Gamma(n+1), \quad (n-1)! \leqslant \Gamma(x) < n!$$

donc $\Gamma(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\dfrac{\Gamma(x)}{x} > \dfrac{(n-1)!}{n+1} \sim \dfrac{(n-1)!}{n-1} = (n-2)!$

donc $$\frac{\Gamma(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

d'où une branche parabolique de direction Oy pour le graphe de $y=\Gamma(x)$.

Ce graphe a donc l'allure suivante

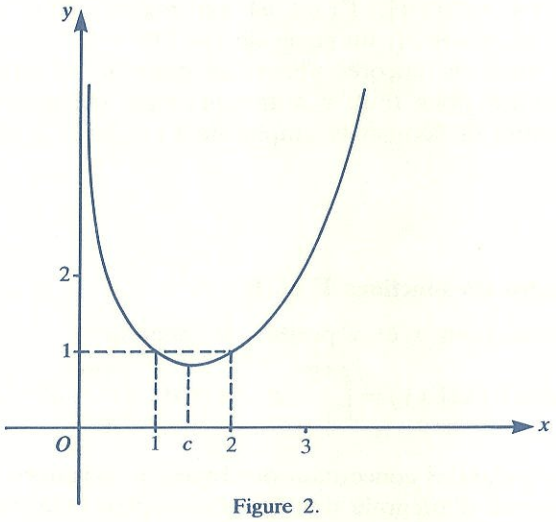


Figure 2.

Notons encore un résultat classique, que nous admettrons

$$\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt = -\gamma$$

γ désignant la constante d'Euler, définie (voir t. 2, chap. 6) par

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_1^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \simeq 0{,}577$$

(*) Pour les valeurs numériques de $\Gamma(x)$ sur $[1, 2]$, voir l'ouvrage *Formules et tables de mathématiques*, p. 235, de Murray R. Spiegel, série Schaum, éditions McGraw-Hill.

4. Prolongement de $\Gamma(x)$ aux valeurs négatives de x

Pour $x \leqslant 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$ diverge.

Mais, grâce à la relation de récurrence $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, on peut poser par convention

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \qquad \forall x \in]-1, 0[$$

Cette même relation permet de définir de proche en proche $\Gamma(x)$ pour toute valeur négative, non entière, de x si $x \in]-n, -n+1[$

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}$$

Comme $x+n \in]0, 1[$, $\Gamma(x+n)$ est positif, $\Gamma(x)$ est donc, sur l'intervalle $]-n, -n+1[$, du signe de $(-1)^n$.

On peut aussi, là encore, utiliser la notation $x! = \Gamma(x+1)$, $x!$ se trouve ainsi défini pour tout x autre qu'entier strictement négatif. Le lecteur complètera facilement le graphe de $\Gamma(x)$ pour x négatif.

5. Relation entre les fonctions Γ et B

Considérons, pour x et y positifs, la fonction

$$f(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt \cdot \int_0^{+\infty} u^{y-1} e^{-u}\, du$$

Ces deux intégrales concernant des fonctions positives, on peut écrire $f(x, y)$ sous forme d'intégrale double dans le plan (Ou, Ot), le domaine d'intégration étant le premier quadrant $u > 0$, $t > 0$

$$f(x, y) = \iint_{\mathbb{D}} t^{x-1} u^{y-1} e^{-(t+u)}\, du\, dt$$

Effectuons le changement de variables $t = v$, $t + u = z$, soit $u = z - v$.

Dans le plan (Oz, Ov), le domaine Δ image de $\mathbb{D}$ est défini par $z > 0$, $0 < v < z$, c'est donc le premier demi-quadrant limité par Oz.

Le jacobien du changement de variables est

$$\frac{D(u, t)}{D(z, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

on a donc

$$f(x, y)=\iint_{\Delta} v^{x-1}(z-v)^{y-1}\, e^{-z}\, dz\, dv$$

$$=\int_0^{+\infty} dz\cdot e^{-z}\int_0^{z} v^{x-1}(z-v)^{y-1}\, dv$$

Si dans l'intégrale par rapport à v nous posons $v=\alpha z$, nous avons

$$f(x, y)=\int_0^{+\infty} e^{-z}\, dz\int_0^{1} \alpha^{x-1}\, z^{x-1}\, z^{y-1}(1-\alpha)^{y-1}\cdot z\, d\alpha$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-z}\, dz\cdot z^{x+y-1}\cdot\int_0^{1} \alpha^{x-1}(1-\alpha)^{y-1}\, d\alpha$$

$$=\Gamma(x, y)\, B(x, y)$$

On en déduit la formule

$$\boxed{B(x, y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)}}$$

Cette formule vient d'être établie pour $x>0$, $y>0$, mais peut évidemment être prolongée aux valeurs négatives pourvu que ni x, ni y, ni $x+y$ ne soit entier négatif. Elle définit alors un prolongement de la fonction B.

6. Formule des compléments

Soit $x\in]0, 1[$ et $y=1-x$, la relation précédente nous donne

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=B(x, 1-x)=\int_0^{1} t^{x-1}(1-t)^{-x}\, dt$$

$$=\int_0^{1}\frac{1}{t}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x} dt$$

Posons $\left(\frac{t}{1-t}\right)^{x}=u$ soit $t=\frac{u^{\frac{1}{x}}}{1+u^{\frac{1}{x}}}=1-\frac{1}{1+u^{\frac{1}{x}}}$

$$dt=\frac{1}{x}\, u^{\frac{1}{x}-1}(1+u^{\frac{1}{x}})^{-2}\, du$$

On a alors

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\int_0^{+\infty}\frac{1+u^{\frac{1}{x}}}{u^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{1}{x}\cdot u^{\frac{1}{x}-1}(1+u^{\frac{1}{x}})^{-2}\, du$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^{\frac{1}{x}}}$$

Cette intégrale est convergente car $\frac{1}{x}>1$. Sa valeur sera calculée dans le chapitre relatif à l'intégration dans $\mathbb{C}$, à l'aide de la théorie des résidus : on trouvera, pour $\alpha>1$, $\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^\alpha}=\frac{\pi}{\alpha \sin \frac{\pi}{\alpha}}$ (immédiat pour $\alpha=2$).

En admettant dès maintenant ce résultat, nous obtenons

$$\boxed{\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}} \qquad (0<x<1)$$

C'est la formule dite des compléments. Elle s'étend facilement aux valeurs négatives, non entières, de x, par exemple,

si $x\in]-1, 0[$ $\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x}$ $x+1\in]0, 1[$

$1-x\in]1, 2[$ $\Gamma(1-x)=-x\Gamma(-x)$ $-x\in]0, 1[$

donc $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=-\Gamma(-x)\,\Gamma(1+x)=-\frac{\pi}{\sin(-\pi x)}=\frac{\pi}{\sin \pi x}$

et ainsi de suite de proche en proche. Elle vaut aussi pour $x>1$, mais non entier.

Application.

Pour $x=\frac{1}{2}$, nous obtenons $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi$

donc puisque $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)>0$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

Or $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t}\,dt \text{ et si } t=x^2$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} e^{-x^2}\,2x\,dx=2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx,$$

on voit que l'on retrouve l'intégrale de Gauss $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (obtenue dans le tome 2, en exercice, à l'aide des intégrales doubles). On peut évidemment déduire de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ les valeurs de $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$, pour tout n entier.

7. Intégrales de Wallis. Formule de duplication pour la fonction Γ

On a calculé dans le tome 1 les intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)(2n+1)}$$

Pour $\alpha > -1$, pas nécessairement entier, on appelle encore intégrale de Wallis la valeur commune $I(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\alpha} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha} x\,dx$ (intégrale divergente si $\alpha \leqslant -1$).

Sous sa seconde forme, par exemple, transformons $I(\alpha)$ par le changement de variable $\sin x = u$, $x = \text{Arc sin } u$.

On obtient $$I(\alpha)=\int_0^1 u^{\alpha}(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\,du$$

Posant encore $u^2 = t$, on a $I(\alpha)=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ou encore

$$I(\alpha)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}$$

On retrouve ainsi les valeurs de $I(n)$ pour n entier et, d'une façon générale, la relation de récurrence $I(\alpha)=\frac{\alpha-1}{\alpha}I(\alpha-2)$, pour $\alpha>1$.

- Pour introduire $\Gamma(2x)$, considérons l'intégrale

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha} 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^{\alpha}\sin^{\alpha}x\cos^{\alpha}x\,dx$$

intégrale que nous transformons directement en posant $\sin^2 x = t$, d'où

$$J=2^{\alpha}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{2}}(1-t)^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{dt}{2\,t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}=2^{\alpha-1}\int_0^1 t^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-t)^{\frac{\alpha-1}{2}}dt$$

$$=2^{\alpha-1}B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\alpha+1}{2}\right)=2^{\alpha-1}\cdot\frac{\left[\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Si, d'autre part, nous posons, dans J, $2x=y$, nous avons

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin^{\alpha}y\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha}y\,dy=I(\alpha),$$

vu la symétrie de la fonction sin y par rapport à la droite $y=\frac{\pi}{2}$.

On a donc $$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}=2^{\alpha-1}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(\alpha+1)}$$

soit $$\Gamma(\alpha+1)=\frac{2^{\alpha}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)$$

En posant $\alpha+1=2x$, on obtient la relation :

$$\boxed{\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}$$

connue sous le nom de formule de duplication de la fonction Γ.

8. Formule de Stirling

La formule de Stirling donne un équivalent simple de $\Gamma(x)$ pour x infiniment grand. Dans un souci d'allègement nous ne le démontrerons que pour x entier, par une méthode un peu artificielle mais rapide. Nous considérons la série de terme général

$$u_n=(n+a)\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)-1$$

expression qui tend vers 0 pour $n\longrightarrow+\infty$, quel que soit a. Nous allons déterminer a pour que la série converge, par un développement limité de u_n suivant $\frac{1}{n}$:

$$u_n=(n+a)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\frac{\varepsilon}{n^3}\right)-1$$

$$=1+\left(a-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{3}-\frac{a}{2}\right)\frac{1}{n^2}-1+\frac{1}{n^2}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right)$$

Pour $a\neq\frac{1}{2}$, $u_n\sim\left(a-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}$ pour $n\longrightarrow\infty$ et la série diverge.

Pour $a=\frac{1}{2}$, $u_n \sim \frac{1}{12\,n^2}$ et la série converge.

Soit S la somme de cette série, c'est-à-dire

$$S=\sum_{1}^{+\infty}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]$$

Soit $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right]$

$$=-n+\sum_{1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}(k+1)-\sum_{1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log} k$$

$$=-n+\sum_{1}^{n+1}\left(k-\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log} k-\sum_{1}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log} k$$

$$=-n+\left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}(n+1)-\sum_{1}^{n}\operatorname{Log} k$$

$$=-n+\left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log} n+\left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\operatorname{Log} n!$$

Comme $\left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right)\longrightarrow 1$ on a

$$S-1=\lim_{n\to\infty}\left[-n+\left(n+\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log} n-\operatorname{Log} n!\right]$$

$e^{1-S}=\lim\,(e^n\cdot n^{-n-\frac{1}{2}}n!)=k$ nombre positif

donc $n!\sim k\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$ lorsque $n\longrightarrow+\infty$

Pour obtenir la valeur de k, reportons cette équivalence dans la formule de Wallis (t. I, p. 187) :

$$\pi\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n}\cdot\frac{2^{4n}(n!)^4}{[(2n)!]^2}\sim\frac{1}{n}\cdot\frac{2^{4n}\cdot k^4\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}\cdot n^2}{k^2\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\cdot 2n}=\frac{k^2}{2}$$

Il en résulte $k^2=2\pi$ et comme $k>0$ $k=\sqrt{2\pi}$.

Donc $$\boxed{n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$$

Plus précisément on peut démontrer que

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

On peut aussi établir que cette formule donnant une valeur « asymptotique » de la factorielle reste valable pour n non entier, c'est-à-dire que

$$\boxed{\Gamma(x+1) \underset{x\to+\infty}{=} \left(\frac{x}{e}\right)^x \cdot \sqrt{2\pi x}\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

C'est la formule de Stirling.

Outre son intérêt pour des calculs de limites, cette formule, en tant qu'égalité numérique approchée, permet d'obtenir l'ordre de grandeur de la factorielle pour n très grand : la plupart des calculatrices donnent $n!$ pour $n \leqslant 69$, avec 8 chiffres significatifs, et pour $n \geqslant 70$ affichent « erreur ». En passant par les logarithmes décimaux, une telle calculatrice donne, par exemple, $1\,000! \simeq 4{,}024 \cdot 10^{2\,567}$.

Résumé du chapitre 1

• **Fonction** $\varphi(x) = \int_a^b f(x, t)\,dt$

Si $f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{D} \times [a, b]$, $\varphi(x)$ est continue sur $\mathbb{D}$.

Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\mathbb{D} \times [a, b]$, $\varphi(x)$ est dérivable sur $\mathbb{D}$ et on peut l'obtenir par dérivation sous le signe $\int$:

$$\varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,dt$$

Si $f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{D} \times [a, b]$ $\varphi(x)$ est intégrable sur $[\alpha, \beta] \times [a, b]$ avec $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{D}$ et

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_\alpha^\beta f(x, t)\right] dt$$

(intégration sous le signe $\int$)

• **Convergence uniforme d'une intégrale** $\varphi(x)=\int_a^{+\infty} f(x, t)\,\mathrm{d}t$

$\varphi(x)$ converge uniformément sur un domaine Δ si on peut trouver un nombre T_0 ne dépendant que de ε tel que

$$T>T_0(\varepsilon) \Longrightarrow \left|\int_T^{+\infty} f(x, t)\,\mathrm{d}t\right|<\varepsilon \quad \forall x\in\Delta$$

• **Convergence normale d'une intégrale** $\varphi(x)=\int_a^{+\infty} f(x, t)\,\mathrm{d}t$

$\varphi(x)$ converge normalement sur Δ s'il existe $g(t)>0$ telle que

$$\forall x\in\Delta, \forall t\geqslant a, \quad |f(x, t)\leqslant g(t) \text{ et } \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

La convergence normale implique la convergence uniforme.

• **Définitions analogues par une intégrale** $\int_a^b f(x, t)\,\mathrm{d}t$

où f est infinie pour une des deux bornes.

• **Propriétés liées à la convergence uniforme.**

— Si $\varphi(x)=\int_a^{+\infty} f(x, t)\,\mathrm{d}t$ est uniformément convergente sur l'intervalle fermé Δ et si $f(x, t)$ est continue sur $\Delta\times[a, +\infty[$

$\varphi(x)$ est continue sur Δ.

— Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $\Delta\times[a, +\infty[$, si $\int_a^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t$ est uniformément convergente sur Δ et si $\int_a^{+\infty} f(x, t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors $\varphi(x)$ est dérivable sur Δ et

$$\varphi'(x)=\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t$$

— Si $\varphi(x)=\int_a^{+\infty} f(x, t)\,\mathrm{d}t$ est uniformément convergente sur Δ, et si $f(x, t)$ est continue sur $\Delta\times[a, +\infty[$ $\varphi(x)$ est intégrable sur $[\alpha, \beta]\subset\Delta$ et

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x, t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

• **Second théorème de la moyenne.**

Si $f(x)$ est intégrable et $g(x)$ non croissante sur $[a, b]$ avec $a<b$ il existe un nombre c de $]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx$$

Forme réduite $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = (c-a)\,g(a) + (b-c)\,g(b)$

• **Fonctions eulériennes.**

Définitions

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,e^{-t}\,dt; \quad x>0$$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt; \quad x>0,\ y>0$$

Relation de récurrence de la fonction Γ

$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, d'où $\Gamma(n+1) = n!$ $(n\in\mathbb{N})$

Pour $x<0$, non entier, $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x}$ permet de connaître $\Gamma(x)$ de proche en proche, sur tout intervalle $]-x, -x+1[$.

Relation entre fonctions B et Γ

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

(x, y et $x+y$ n'étant pas entiers négatifs)

Formule des compléments

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (x \text{ non entier})$$

Cas particulier $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Intégrale de Wallis

$$I(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}+1\right)} \quad \alpha>-1$$

Formule de duplication

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

Formule de Stirling

$$\Gamma(x)\underset{x\to+\infty}{=}\left(\frac{x}{e}\right)^x\sqrt{2\pi x}\left(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{x}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

EXERCICES

■ **1.** Étudier la fonction $f(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$. Indiquer l'allure de son graphe.

Cette intégrale a un sens pourvu que t soit >0 et $\neq 1$ sur $[x, x^2]$. Ceci exclut $x\leqslant 0$ et $x=1$. Pour $x\in]0,1[$, $0<x^2<x<1$; pour $x>1$, $1<x<x^2$; dans les deux cas $f(x)$ existe. Ainsi le domaine de définition de f est $]0,1[\cup]1,+\infty[=\mathbb{D}$.

Étudions les variations de f. D'après la formule du paragraphe (A, 3.) du chapitre 9, tome 2,

$$f'(x)=\frac{2x}{\ln(x^2)}-\frac{1}{\ln x}=\frac{x-1}{\ln x}\quad f'(x)>0 \text{ sur } \mathbb{D}$$

Quand $x\longrightarrow 0^+$, $\frac{1}{\ln t}\longrightarrow 0^-$, puisque $t\in[x,x^2]$, et $f(x)\longrightarrow 0^+$, $f'(x)\longrightarrow 0^+$.

Quand $x\longrightarrow+\infty$,

$$\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln(x^2)}<f(x)<\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln x}$$

$$\frac{x^2-x}{2\ln x}<f(x)<\frac{x^2-x}{\ln x}$$

Donc $f(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

De même $\frac{x-1}{2\ln x}<\frac{f(x)}{x}<\frac{x-1}{\ln x}$ montre que $\frac{f(x)}{x}\longrightarrow+\infty$

Quand $x\longrightarrow 1$, posons $\ln t=u$, il vient $f(x)=\int_{\ln x}^{2\ln x}\frac{e^u\,du}{u}$

Comme $e^u>0$ et $\frac{1}{u}$ continue sur $[\ln x, 2\ln x]$, le premier théorème de la moyenne permet d'écrire $f(x)=e^c\int_{\ln x}^{2\ln x}\frac{du}{u}=e^c\ln 2$ avec $c\in]\ln x, 2\ln x[$.

Quand $x \longrightarrow 1$, $\ln x \longrightarrow 0$, $2 \ln x \longrightarrow 0$ et $c \longrightarrow 0$, donc $f(x) \longrightarrow \ln 2$.

D'autre part, quand $x \longrightarrow 1$, $f'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x} \sim \dfrac{x-1}{x-1} = 1$.

On a donc des prolongements par continuité de f et f' en posant

$$f(1) = \ln 2 \qquad f'(1) = 1$$
$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = 0$$

Enfin $f''(x) = \dfrac{1}{(\ln x)^2}\left(\ln x - \dfrac{x-1}{x}\right)$ et si nous posons $\varphi(x) = \ln x - 1 + \dfrac{1}{x}$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$ change de signe pour $x = 1$, et un tableau de variations de φ montre que $\varphi(x) > 0$, sauf pour $x = 1$, valeur pour laquelle $\varphi(x) = 0$.

$f''(x)$ est donc positive sur $\mathbb{D}$ et la courbe est concave vers les y positifs. Un développement limité suivant $z = x - 1$ conduit d'ailleurs à poser $f''(1) = \dfrac{1}{2}$.

Nous obtenons donc la courbe ci-dessous qui a l'aspect d'une demi-parabole d'axe Oy.

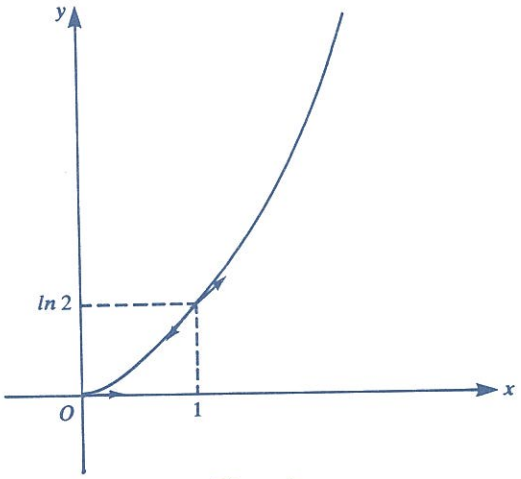


Figure 3.

■ **2.** Montrer que la fonction

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Arc tg}(x+t)}{1+t^2}\,dt$$

est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $\varphi'(x)$ et en déduire la valeur de $\varphi(x)$.

Soit $f(x, t)=\dfrac{\text{Arc tg}(x+t)}{1+t^2}$, on a $|f(x, t)|<\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{1+t^2}$, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$ converge, l'intégrale est donc normalement, et par suite uniformément, convergente sur $\mathbb{R}$. Comme $f(x, t)$ est continue, $\varphi(x)$ l'est aussi.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)=\dfrac{1}{(1+t^2)[1+(x+t)^2]}$ est positive et majorée par $\dfrac{1}{1+t^2}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,dt$ est, elle aussi, uniformément convergente.

Ainsi la dérivation sous le signe $\int$ est justifiée :

$$\varphi'(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)[1+(x+t)^2]}$$

Remarquons aussi que si dans

$$\varphi(-x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\text{Arc tg}(t-x)}{1+t^2}\,dt$$

on pose $t=-u$, on a $\varphi(-x)=\displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty}\frac{\text{Arc tg}(-u-x)}{1+u^2}(-du)=-\varphi(x)$

φ est donc une fonction impaire, et $x=0$ donne $\varphi(0)=0$, ce que l'on retrouve par $\displaystyle\int\frac{\text{Arc tg } t}{1+t^2}\,dt=\frac{1}{2}(\text{Arc tg } t)^2$, (alors que pour $x\neq 0$, $\displaystyle\int f(x, t)$ n'est pas calculable élémentairement, l'intégration par parties conduisant à un « cercle vicieux »).

On peut donc raisonner pour $x>0$.

Décomposons $g(x, t)=\dfrac{1}{(1+t^2)[1+(x+t)^2]}$ en éléments simples

$$g(x, t)=\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{Ct+D}{1+(x+t)^2}$$

$t=i$ donne $Ai+B=\dfrac{1}{1+(x+i)^2}=\dfrac{1}{x^2+2ix}=\dfrac{x-2i}{x(x^2+4)}$

d'où $A=\dfrac{-2}{x(x^2+4)}$ $B=\dfrac{1}{x^2+4}$

$t=i-x$ donne $C(i-x)+D=\dfrac{1}{1+(i-x)^2}=\dfrac{1}{x^2-2ix}=\dfrac{x+2i}{x(x^2+4)}$

d'où $C=\dfrac{2}{x(x^2+4)}$ $D=\dfrac{3}{x^2+4}$

$$\text{D'où}\quad \varphi'(x)=\frac{1}{x(x^2+4)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{-2t+x}{1+t^2}+\frac{2t+3x}{1+(t+x)^2}\right]dt$$

$$=\frac{1}{x(x^2+4)}\Big[-\ln(1+t^2)+x\ \text{Arc tg}\ t+\ln(1+(t+x)^2)+x\ \text{Arc tg}(t+x)\Big]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=\frac{2\pi}{x^2+4}$$

On en déduit $\varphi(x)=\pi\ \text{Arc tg}\ \frac{x}{2}+C$

Le calcul qui précède suppose $x\neq 0$, mais on a établi que φ est continue sur $\mathbb{R}$, on a donc $\varphi(0)=C$ or $\varphi(0)=0$ donc $C=0$.
Il en résulte que, pour tout x réel,

$$\varphi(x)=\pi\ \text{Arc tg}\ \frac{x}{2}.$$

■ **3.** Soit $f(t)$ une fonction continue pour $t>0$, telle que $\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt$ converge pour tout α positif, et que $\lim_{t\to 0^+} f(t)=A$.

Démontrer que si $x>0$ $\int_0^{+\infty}\frac{f(t)-f(tx)}{t}dt=A\ \ln x$

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}dt$ a et b étant positifs.

Considérons l'intégrale $I(\alpha, X)=\int_{\alpha}^{X}\frac{f(t)-f(tx)}{t}dt$, pour un α fixé >0, et envisageons sa limite éventuelle lorsque $X\longrightarrow+\infty$.

Nous pouvons l'écrire

$$I(\alpha, X)=\int_{\alpha}^{X}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{\alpha}^{X}\frac{f(tx)}{t}dt$$

soit, en posant $tx=u$ dans la seconde intégrale, alors $\frac{dt}{t}=\frac{du}{u}$ et

$$I(\alpha, X)=\int_{\alpha}^{X}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{\alpha x}^{Xx}\frac{f(u)}{u}du$$

$$=\int_{\alpha}^{\alpha x}\frac{f(t)}{t}dt+\int_{\alpha x}^{X}\frac{f(t)}{t}dt+\int_{Xx}^{X}\frac{f(t)}{t}dt+\int_{X}^{\alpha x}\frac{f(t)}{t}dt$$

$$=\int_{\alpha}^{\alpha x}\frac{f(t)}{t}dt+\int_{Xx}^{X}\frac{f(t)}{t}dt$$

Pour x donné >0, $\displaystyle\int_{Xx}^{X} \frac{f(t)}{t}\,dt \longrightarrow 0$ puisque $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge $\forall \alpha > 0$.

Donc $$\lim_{X \to +\infty} I(\alpha, X) = \int_{\alpha}^{\alpha x} \frac{f(t)}{t}\,dt = J(\alpha)$$

Envisageons maintenant $\lim_{\alpha \to 0^+} J(\alpha)$.

Puisque f est continue et $\frac{1}{t}$ de signe constant sur $[\alpha, \alpha x]$, il existe, d'après le premier théorème de la moyenne, un nombre $c \in]\alpha, \alpha x[$ tel que

$$J(\alpha) = f(c) \int_{\alpha}^{\alpha x} \frac{dt}{t} = f(c) \cdot \ln x$$

Or lorsque $\alpha \longrightarrow 0$ $\alpha x \longrightarrow 0$ et $c \longrightarrow 0$ donc $f(c) \longrightarrow A$ et $J(\alpha) \longrightarrow A \ln x$.

Ainsi $I(\alpha, X)$ a pour limite, lorsque $\alpha \longrightarrow 0^+$ et $X \longrightarrow +\infty$ $A \ln x$,

on a donc bien $$\int_{0}^{+\infty} \frac{f(t) - f(tx)}{t}\,dt = A \ln x \qquad (1)$$

Dans $K = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,dt$, où a et b sont positifs, posons $at = u$, $\frac{dt}{t} = \frac{du}{u}$ il vient $K = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{f(u) - f\left(\frac{b}{a}u\right)}{u}\,du = A \ln \frac{b}{a}$, d'après (1).

On trouve ainsi la formule dite de Frullani :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,dt = f(0^+) \cdot \ln \frac{b}{a}$$

valable pour f continue sur $[\alpha, +\infty[$, admettant une limite finie en 0^+ et telle que $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge, pour tout $\alpha > 0$.

Par exemple $$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{at} - e^{bt}}{t}\,dt = \ln \frac{b}{a} = \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t}\,dt$$

■ **4.** *a*) Calculer à l'aide d'une relation de récurrence l'intégrale

$$I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

b) Étudier les variations sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de $\varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$.

c) A l'aide du second théorème de la moyenne, démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) \sin (2n+1)x \, dx = 0$$

En déduire la valeur de l'intégrale « de Dirichlet » $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

---

a) $I_0 = \frac{\pi}{2}$.

Pour $n \geqslant 1$ $\quad I_n - I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (2n+1)x - \sin (2n-1)x}{\sin x} dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos 2nx}{\sin x} dx = 0$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad I_n = \frac{\pi}{2}$.

b) Quand $x \longrightarrow 0^+$ $\quad \varphi(x) = \frac{\sin x - x}{x \sin x} \sim \frac{-\frac{x^3}{3!}}{x^2} = -\frac{x}{6} \longrightarrow 0^-$

$\varphi(x)$ semble décroissante au départ.

Calculons $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{g(x)}{x^2 \sin^2 x}$

qui est du signe de

$$g(x) = x^2 \cos x - \sin^2 x = (x \sqrt{\cos x} - \sin x)(x \sqrt{\cos x} + \sin x)$$

elle-même du signe de $h(x) = x - \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$

Calculons encore

$$h'(x) = 1 - \sqrt{\cos x} - \sin x \left(-\frac{1}{2} \right) (\cos x)^{-\frac{3}{2}} (-\sin x)$$

$$= 1 - \sqrt{\cos x} - \frac{\sin^2 x}{2 \cos x \sqrt{\cos x}}$$

$$= \frac{2 \cos x \sqrt{\cos x} - \cos^2 x - 1}{2 \cos x \sqrt{\cos x}}$$

qui est du signe de $2 \cos x \sqrt{\cos x} - (1 - \cos x)^2 - 2 \cos x$

$$= 2 \cos x (\sqrt{\cos x} - 1) - (1 - \cos x)^2$$

donc négatif.

Ainsi $h'(x)<0$, $h(x)$ décroît sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de 0 à $-\infty$, donc est négative, il en est de même de $\varphi'(x)$.

$\varphi(x)$ décroît donc de 0 à $\frac{2}{\pi}-1$ quand x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

c) $\varphi(x)$ étant décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f(x)=\sin(2n+1)x$ intégrable, on peut appliquer le second théorème de la moyenne : il existe $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) \sin(2n+1)x\,dx = \varphi(0)\int_0^c f(x)\,dx + \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_c^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}-1\right)\int_c^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n+1)x\,dx$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}-1\right)\left[-\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}\right]_c^{\frac{\pi}{2}}$$

qui tend vers 0 pour $n \longrightarrow \infty$.

On a donc bien $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) \sin(2n+1)x\,dx = 0$

et, d'après (*a*), $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Or on a vu (tome 1) que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,du$ existe, on a donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}}$$

■ **5.** En utilisant le résultat de l'exercice précédent, calculer les intégrales

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{t}\,dt$$

$$g(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx \sin ty}{t^2}\,dt$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3}\,dt.$$

• Pour $x>0$ $\quad xt=u \Longrightarrow f(x)=\frac{\pi}{2}$

$x<0$ $\quad -xt=u \Longrightarrow f(x)=-\frac{\pi}{2}$

$x=0$ $\quad f(x)=0$

f est donc discontinue en 0, c'est d'ailleurs une intégrale de Fourier (voir t. 2, chap. 9). La discontinuité s'explique par la convergence non uniforme de l'intégrale.

• En transformant sin tx sin ty en différence de cosinus et intégrant par parties, on trouve $g(x, y)=\frac{\pi}{4}(|x+y|-|x-y|)$

En particulier $g(1, 1)=\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}$

g est une fonction continue de x, y, ce qui était prévisible car l'intégrale définissant g est uniformément convergente et la fonction à intégrer est continue.

• En intégrant par parties, on se ramène à un coefficient près à $g(2, 1)$ et on obtient $I=\frac{3\pi}{8}$.

■ **6.** *a*) Démontrer que pour $|x|<1$ la fonction $f(x, t)=\ln(x^2-2x\cos t+1)$ admet pour développement en série entière par rapport à x

$$f(x, t)=-2\sum_1^{+\infty}\frac{x^n}{n}\cos nt$$

b) En déduire les valeurs de $\varphi(x)=\int_0^{\pi}\ln(x^2-2x\cos t+1)\,dt$

et de $I_n(x)=\int_0^{\pi}\ln(x^2-2x\cos t+1)\cos nt\,dt$, $n\in\mathbb{N}^*$ pour $|x|<1$.

c) Calculer $\varphi(x)$ pour $|x|>1$.

d) En intégrant sur $[0, 1]$ la fonction $g(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+x^2\operatorname{tg}^2 t}$, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt$ et en déduire $\varphi(1)$ et $\varphi(-1)$. La fonction φ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Indications.

a) Décomposer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$, et utiliser

$$\frac{1}{1-z}=\sum_0^{+\infty} z^n\ (|z|<1)$$

b) On connaît par (*a*) le développement de $f(x, t)$ en série de Fourier par rapport à t, on a donc $\varphi(x)=a_0=0$

$$I_n(x)=\frac{\pi}{2}a_n=-\pi\frac{x^n}{n}$$

c) En posant dans $\varphi(x)$ pour $|x|>1$ $\quad x=\dfrac{1}{y}$ on trouve

$$\varphi(X)=2\pi \ln |x|$$

d) L'intégration sous le signe $\int$ se justifiant par la continuité de $\dfrac{1}{1+x^2 \operatorname{tg}^2 t}$ on a

$$\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \operatorname{cotg} t\,dt=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t\,dt$$

Mais d'autre part $g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+x^2)(1+x^2u^2)}=\frac{\pi}{2(1+x)}$

on en déduit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t\,dt=-\frac{\pi}{2}\ln 2 \qquad \text{et} \quad \varphi(1)=0$$

φ est paire (changement de variable $t=\pi-z$ dans φ), donc $\varphi(-1)=0$.

Donc φ est continue sur $\mathbb{R}$.

■ **7.** Soit $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}dt$.

a) Montrer que cette intégrale est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'elle peut être dérivée sous le signe $\int$ pour $0\leqslant a\leqslant x\leqslant b$

a et b étant des nombres positifs quelconques.

c) Établir que $f'(x)=-2f(x)$ pour $x>0$. En déduire la valeur de $f(x)$.

---

a) On a $0<e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}\leqslant e^{-t^2}$ l'intégrale est normalement, donc uniformément, convergente sur $\mathbb{R}$.

b) L'intégrale obtenue en dérivant sous le signe $\int$ peut être séparée en $\displaystyle\int_0^1 -\frac{2x}{t^2}e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}dt$, où la fonction est majorée en module par $\dfrac{2b}{t^2}e^{-\frac{a^2}{t^2}}$ dont l'intégrale converge, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} -\frac{2x}{t^2}e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}dt$, où elle est majorée par $2be^{-t^2}$ dont l'intégrale converge.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2}e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}dt$ converge donc uniformément sur $[a, b]$, et :

$$f'(x)=-2x\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2}e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}dt, \quad \forall x\geqslant a>0$$

c) Dans $f'(x)$ supposons $x>0$ et posons $\frac{x}{t}=u \quad du=-\frac{x}{t^2}\,dt$

on a $f'(x)=-2\int_0^{+\infty} e^{-\left(u^2+\frac{x^2}{u^2}\right)}\,du=-2f(x)$.

Donc $f(x)=ke^{-2x}\ \forall x>0$ $k=$constante.

Or d'après (*a*) f est continue et $f(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, donc $k=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Comme f est manifestement paire

$$f(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-2|x|}$$

On remarque que $f'(0)$ n'est pas définie et que $f'(0^+)=-\sqrt{\pi}$, $f'(0^-)=\sqrt{\pi}$, la discontinuité de f' en 0 s'explique par la convergence non uniforme de $\int_0^{+\infty} -\frac{2x}{t^2}\,e^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}\,dt$ sur un intervalle contenant 0.

■ **8.** Calculer lorsqu'elle est définie, l'intégrale $I(\alpha)=\int_0^1 (1-x^\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}\,dx$.

Indications. $I(\alpha)$ est définie pour $\alpha>1$. Le changement de variable $x^\alpha=t$ donne $I(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{\alpha\sin\frac{\pi}{\alpha}}$ (élémentaire pour $\alpha=2$).

■ **9.** *a*) Pour quelles valeurs de α, β l'intégrale $J(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{t^\alpha}{(1+t)^\beta}\,dt$ est-elle définie? L'exprimer à l'aide de la fonction Γ.

b) Montrer que $\varphi(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{(1+t)^2}\,dt$ peut être dérivée sous le signe $\int$ sur son domaine de définition, et en déduire la valeur de l'intégrale

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}\cdot\ln t}{(1+t)^2}\,dt$$

---

a) L'intégrale $J(\alpha,\beta)$ converge en 0 si $\alpha>-1$ puisque $f(t)=\frac{t^\alpha}{(1+t)^\beta}\sim t^\alpha$. Quand $t\longrightarrow+\infty$, $f(t)\sim t^{\alpha-\beta}$, il y a convergence si $\alpha-\beta<-1$.

Le domaine de définition de J est donc le domaine hachuré sur la figure 4.

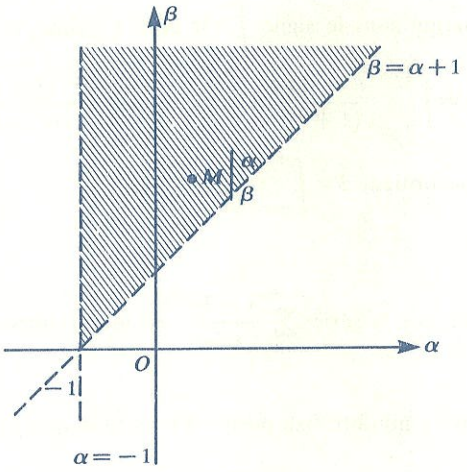


Figure 4.

Le changement de variable $t=\dfrac{x}{1+x}$ permet d'exprimer $J(\alpha, \beta)$ sous la forme

$$J(\alpha, \beta)=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha-1)}{\Gamma(\beta)}$$

b) $\varphi(x)=J(x-1, 2)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(2-x)}{\Gamma(2)}$

Comme $\Gamma(2)=1$ et $\Gamma(2-x)=(1-x)\,\Gamma(1-x)$ et en outre $\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin \pi x}$ on a $\Gamma\varphi(x)=\dfrac{\pi(1-x)}{\sin \pi x}$

Ceci, d'après la première question, suppose $0<x<2$.

Montrons que si $g(x, t)=\dfrac{t^{x-1}}{(1+t)^2}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t$ converge uniformément pour $0<a\leqslant x\leqslant b<2$.

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, t)=\dfrac{t^{x-1}\ln t}{(1+t)^2}$ est positive sur $[1, +\infty[$, négative sur $]0, 1]$.

Chacune des deux intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t$ converge normalement, car pour $t\geqslant 1$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}<\dfrac{t^{b-1}}{(1+t)^2}$ pour $t\leqslant 1$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}\right|\leqslant t^{a-1}\ln t$; et chacune des intégrales des fonctions mojorantes converge; en outre $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est continue sur $]0, 2[\times]0, +\infty[$.

La dérivation sous le signe $\int$ est donc légitime, et

$$\varphi'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}\ln t}{(1+t)^2}\,dt=\pi\frac{-\sin\pi x-(1-x)\,\pi\cos\pi x}{\sin^2\pi x}$$

Pour $x=\frac{3}{2}$ on obtient $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{t}\ln t}{(1+t)^2}\,dt=\pi$

10. *a*) Démontrer que la série $\sum_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ est uniformément convergente pour $x\geqslant a$, a étant un nombre fixe positif. En déduire que $f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ est une fonction continue sur $[a, b]\in]0, 1[$.

b) Montrer, par une récurrence sur x, que $f(x)$ est définie et continue sur tout segment fermé ne contenant pas d'entier, et que $f(x)$ est périodique et impaire.

c) En partant de l'intégrale $B(x, 1-x)$, où $0<x<1$, établir la relation $\frac{\pi}{\sin\pi x}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$.

d) Démontrer que cette relation peut être dérivée terme à terme pour tout x non entier, et en déduire, par un passage à la limite que l'on justifiera, les valeurs de $\sum_1^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\sum_1^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

---

a) La série Σu_n, où $u_n=\frac{(-1)^n}{x+n}$, $x>0$, est alternée, (u_n) est décroissante et a pour limite 0, elle est donc convergente. Elle n'est cependant pas absolument convergente car $|u_n|\sim\frac{1}{n}$, donc pas normalement convergente. Revenons donc à la définition de la convergence uniforme : d'après ce qui précède, si $x\geqslant a\geqslant 0$

$$|R_n|=\left|\sum_{n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{n+k}\right|<\frac{1}{x+n+1}\leqslant\frac{1}{a+n+1}<\frac{1}{n}$$

On peut donc réaliser $|R_n|<\varepsilon$ pour $n\geqslant n_0(\varepsilon)=E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+1$, indépendant de x, la convergence est donc uniforme (sans être ici normale).

Donc

$$\varphi(x)=\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}-\ldots+\frac{(-1)^n}{x+n}+\ldots$$

est définie et continue sur $[a, +\infty[$, $a>0$.

Considérons, en admettant momentanément son existence, la série :

$$\sum_{-1}^{-\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}=\sum_{1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x-n}=-\sum_{1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-x}=-\sum_{0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1-x}$$
$$=\sum_{0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-x}$$

On voit qu'elle est égale à $\varphi(1-x)$, définie et continue pour

$$1-x\geqslant\alpha \qquad \alpha>0 \qquad \text{donc} \qquad x\leqslant 1-\alpha=b<1$$

Il en résulte $f(x)=\varphi(x)+\varphi(1-x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ définie et continue au moins sur $[a, b]\subset]0, 1[$.

b) Pour $x\in[a+1, b+1]$,

$$f(x-1)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x-1+n}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}=-\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}=-f(x)$$

ce qui définit $f(x)$ et implique qu'elle est continue sur $[a+1, b+1]$; de proche en proche on voit que $f(x)$ est définie et continue sur tout intervalle $[k+a, k+b]$, k entier relatif, $[a, b]\subset]0, 1[$.

On a trouvé $f(x)=-f(x-1)$, ou $f(x+1)=-f(x)$.

Il en résulte $f(x+2)=-f(x+1)=f(x)$, f est donc périodique de période égale à 2.

Enfin $f(-x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-x}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{-n-x}=-f(x)$, f est impaire.

c) Pour $0<x<1$

$$B(x, 1-x)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{-x}\,dt=\int_0^1\frac{1}{t}\left(\frac{t}{1-t}\right)^x dt$$

Effectuons le changement de variable $\frac{t}{1-t}=u \quad t=\frac{u}{1+u}=1-\frac{1}{1+u}$

il vient

$$B(x, 1-x)=\int_0^{+\infty} u^x\cdot\frac{1+u}{u}\cdot\frac{du}{(1+u)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{1+u}\,du=J$$

Pour utiliser une série entière $\frac{1}{1+u}=\sum_{0}^{+\infty}(-u)^n$ $(|u|<1)$, écrivons

$$J=J_1+J_2 \text{ avec } J_1=\int_0^1 \frac{u^{x-1}}{1+u}\,du \quad J_2=\int_1^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{1+u}\,du$$

où $u=\frac{1}{v}$ donne $$J_2=\int_0^1 \frac{u^{-x}}{1+u}\,du$$

Pour $0<a<b<1$, on peut écrire

$$\int_a^b \frac{u^{n-1}}{1+u}\,du=\int_a^b\left(\sum_0^{+\infty}(-1)^n u^{x-1+n}\right)du=\left[\sum_0^{+\infty}(-1)^n\frac{u^{x+n}}{x+n}\right]_{u=a}^{u=b}$$

et $$\int_a^b \frac{u^{-x}}{1+u}\,du=\left[\sum_0^{+\infty}(-1)^n\frac{u^{1-x+n}}{1-x+n}\right]_{u=a}^{u=b}$$

Ces deux séries entières en u sont uniformément convergentes sur $[-b, +b]$ donc continues en 0 et on peut donner à a la valeur zéro. Quand $u \longrightarrow 1$, qui est leur rayon de convergence, il y a encore continuité (voir chap. 7, t. 2, Séries entières) puisque les séries restent convergentes, on peut donc donner à b la valeur 1.

Ainsi $$J=\sum_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}+\sum_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-x+n}=\varphi(x)+\varphi(1-x)=f(x).$$

Comme, par ailleurs $B(x, 1-x)=\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x}$, nous avons établi la formule :

$$\frac{\pi}{\sin \pi x}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n},\ 0<x<1. \qquad (1)$$

On retrouve aisément la période 2 et les autres propriétés de f vues en (b), d'où le prolongement de la formule à tout x non entier. Ce développement d'une fonction non rationnelle en série de fonctions rationnelles apparaît comme une généralisation de la décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle, les pôles de $\frac{\pi}{\sin \pi x}$ étant tous les entiers relatifs n (ou $-n$).

d) La série des dérivées de la série précédente, $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(x+n)^2}$ est uniformément convergente (car normalement convergente) sur tout $[a, b]$ ne

contenant pas d'entier, la dérivation terme à terme de la formule (1) est donc permise, et :

$$-\frac{\pi^2 \cos \pi x}{\sin^2 \pi x}=\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(x+n)^2}$$

ou $$\frac{\pi^2 \cos \pi x}{\sin^2 \pi x}=\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}=\frac{1}{x^2}+\sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}+\sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(x-n)^2}.$$

Les sommes de ces deux séries sont continues pour tout x, leur limite commune en 0 est $\sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}=-S_1$, si $S_1=\sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ on a donc

$$\begin{aligned} 2S_1 &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{\pi^2 \cos \pi x}{\sin^2 \pi x}\right) \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \pi x-\pi^2 x^2 \cos \pi x}{\pi^2 x^4} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\pi^2 x^2-\frac{\pi^4 x^4}{3}-\pi^2 x^2\left(1-\frac{\pi^2 x^2}{2}\right)}{\pi^2 x^4}=\frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Donc $$S_1=\frac{\pi^2}{12}$$

En observant que $S-S_1=\sum_{1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^{n-1}}{n^2}=\sum_{1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^2}=\frac{1}{2}S$

si $S=\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, on retrouve le résultat classique $\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

■ **11.** Calculer, lorsqu'elle a un sens, l'intégrale $I(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^\alpha x \, dx$.

Il faut $-1<\alpha<1$. En posant $\sin x=t$, on trouve

$$I(\alpha)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi\alpha}{2}}$$

■ **12.** Calculer $J=\int_0^1 \ln \Gamma(x)\,dx$ en utilisant le changement de variable $x=1-t$ et le résultat de l'exercice (6, *d*).

En écrivant $J=\frac{1}{2}\int_0^1 \ln \Gamma(x)\Gamma(1-x)\,dx$, on obtient $J=\ln \sqrt{2\pi}$.

CHAPITRE 2

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

Dans ce chapitre, nous utiliserons les notions élémentaires concernant les nombres complexes, notions qui relèvent de l'algèbre et seront reprises et développées dans le tome 4, ainsi que la théorie des fonctions de plusieurs variables (deux, en fait, ici), qui fait l'objet du chapitre 11 du tome 1.

A. GÉNÉRALITÉS. FONCTIONS HOLOMORPHES

1. Définitions

Nous avons déjà rencontré, sans théorie nouvelle, des fonctions d'une variable complexe telles que les polynômes, les fractions rationnelles, les séries entières de la forme $\sum_{0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $|z|<R$, R étant le rayon de convergence.

D'une façon générale on appelle fonction d'une variable complexe une application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $z \in \mathbb{C} \xrightarrow{f} Z = f(z) \in \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ peut être assimilé au **plan complexe** appelé aussi **plan de Cauchy** où un nombre complexe $z = x + iy$ est représenté par son image m*, de coordonnées x, y; f est donc aussi une application du plan complexe dans lui-même, ou, ce qui est souvent plus commode, dans un autre plan complexe. Cette fonction f est définie sur un ensemble $\mathbb{D}$ qui est généralement un domaine, au sens défini tome 1, chapitre 11, et l'ensemble Δ des points M d'affixes $Z = f(z)$ est l'image ou le transformé de $\mathbb{D}$ par f.

Si tout point M de Δ est l'image par f d'un point unique de $\mathbb{D}$, f est une bijection de $\mathbb{D}$ dans Δ et admet une fonction réciproque f^{-1}, telle que $z = f^{-1}(Z)$.

---

* On parlera couramment du « point » z, assimilant ainsi z à m.

On définit comme dans $\mathbb{R}$ la composée de deux fonctions : si f est définie sur $\mathbb{D}$ et si g est une fonction définie sur Δ, image de $\mathbb{D}$ par f, et si $\mathbb{D}_1$ est l'image de Δ par g, la fonction $g \circ f$ telle que $(g \circ f)(z) = g[f(z)]$ est définie sur $\mathbb{D}$ et applique $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}_1$.

La définition la plus générale d'une fonction $f(z)$ conduit à se donner $Z = X + iY$ par ses parties réelle et imaginaire exprimées en fonctions de celles x et y de z :

$$z = x + iy \xrightarrow[f]{} Z = P(x, y) + iQ(x, y) : P = \operatorname{Re} f(z)\ Q = \operatorname{Im} f(z)$$

Si m décrit un arc paramétré de $\mathbb{D}$, $z = x(t) + iy(t)$ (forme complexe du paramétrage), M décrit un arc paramétré de Δ, défini par

$$Z(t) = P[x(t), y(t)] + iQ[x(t), y(t)] = X(t) + iY(t)$$

Exemples.

• La fonction $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$ est définie sur $\mathbb{C} - \{i, -i\}$; l'image de l'axe imaginaire $z = it\ (t \in \mathbb{R})$ par f définie par $Z = \dfrac{it}{t^2+1}$ est la partie de l'axe imaginaire définie par $-\dfrac{1}{2} \leqslant Y \leqslant \dfrac{1}{2}$; l'application f n'est pas bijective car l'équation $\dfrac{z}{z^2+1} = Z$ a généralement deux racines en z, pour Z donné.

• La fonction f telle que $f(x+iy) = x + y - 1 + i(x - y + 2)$ est définie sur $\mathbb{C}$ et est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, la fonction réciproque est f^{-1} telle que $f^{-1}(X + iY) = \dfrac{X + Y + 3}{2} + i\dfrac{X - Y - 1}{2}$

2. Limites. Continuité

• Si f est définie sur un domainè $\mathbb{D}$ et si z_0 est un point de $\mathbb{D}$ ou de sa frontière, on dit que f admet en z_0 une limite $l = a + ib$ si, pour tout ε positif, il existe un nombre α positif tel que

$$|z - z_0| < \alpha \Longrightarrow |f(z) - l| < \varepsilon$$

Pour que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$ si $f(x+iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$ et $z_0 = x_0 + iy_0$ il faut et il suffit que

$$\lim_{(x,\ y) \to (x_0,\ y_0)} P(x, y) = a$$

$$\lim_{(x,\ y) \to (x_0,\ y_0)} Q(x, y) = b.$$

• Si f est définie sur $\mathbb{D}$, on dit qu'elle est continue en un point z_0 de $\mathbb{D}$ si $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Pour cela il faut et il suffit que $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ soient des fonctions continues au point (x_0, y_0).

Une fonction continue en tout point d'un domaine $\mathbb{D}$ est dite continue sur $\mathbb{D}$.

• On démontre comme dans $\mathbb{R}$ qu'une somme, un produit, un quotient (sous réserve de dénominateur non nul) de fonctions ayant des limites en un point z_0 ont pour limites la somme, le produit, le quotient de ces limites.

De même si $f(z) \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} l$ et si $g(u) \underset{u \to l}{\longrightarrow} \lambda$ $\quad (g \circ f)(z) \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} \lambda$

Il en résulte qu'une somme, un produit, un quotient, une fonction composée de fonctions continues en un point (ou sur un domaine) sont des fonctions continues (sauf, pour un quotient, dans le cas d'un dénominateur nul).

• On définit de façon analogue les limites infinies éventuelles, pour la variable comme pour la fonction : par exemple on dira que $f(z)$ tend vers l'infini en z_0, point de la frontière de $\mathbb{D}$, si pour tout A positif on peut trouver un α positif tel que $|z - z_0| < \alpha \Longrightarrow |f(z)| > A$.

On voit que l'expression « tend vers l'infini » est à interpréter en module. Cependant il y a parfois lieu de préciser que z, ou $f(z)$, tend vers l'infini dans une certaine direction, ou sur une certaine courbe : par exemple $z \longrightarrow 1 + i\infty$ signifie que dans $z = x + iy$, $x \longrightarrow 1$ et $y \longrightarrow \pm\infty$.

3. Dérivée d'une fonction en un point. Dérivées successives. Fonction holomorphe

• On dit que la fonction f, définie sur $\mathbb{D}$, est dérivable en un point z_0 de $\mathbb{D}$, si le rapport $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ admet une limite quand z tend vers z_0. Cette limite est alors la dérivée de f en z_0, et s'écrit $f'(z_0)$, de sorte que

$$\boxed{f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}$$

Comme $z - z_0 \longrightarrow 0$, l'existence de $f'(z_0)$, c'est-à-dire la dérivabilité de f en z_0, implique sa continuité; la réciproque est fausse : par exemple $f(z) = |z|$ est continue en 0, mais non dérivable car $\dfrac{|\rho e^{i\theta}|}{\rho e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ n'a pas de limite quand $z \longrightarrow 0$, c'est-à-dire $\rho \longrightarrow 0$, puisque θ n'a pas de limite.

• Cas particulier : si la variable est réelle, $z=x$, $f(x)=P(x)+iQ(x)$ est dérivable pourvu que P et Q le soient, ainsi $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ a pour dérivée $-\sin x+i\cos x=ie^{ix}$.

• Le calcul des dérivées, sur des fonctions résultant de fonctions dérivables par des opérations simples, s'effectue et se justifie dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$: $u(z)$ et $v(z)$ étant des fonctions dérivables en z_0, on a pour tous λ, μ complexes $(\lambda u+\mu v)'=\lambda u'+\mu v'$ (linéarité de la dérivation) : $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ si $v(z_0)\neq 0$.

Si f est dérivable en z_0 et si g est dérivable en $z_1=f(z_0)$, $F(z)=(g\circ f)(z)$ est dérivable en z_0 et $F'(z_0)=(g'\circ f)(z_0)\,f'(z_0)$.

Pour n entier naturel $(z^n)'=nz^{n-1}$ pour tout z complexe. Il en résulte le calcul, comme dans $\mathbb{R}$, de la dérivée d'une fonction rationnelle.

• Si une fonction f est dérivable en tout point z d'un domaine $\mathbb{D}$, sa fonction dérivée $f'(z)$ est définie sur $\mathbb{D}$, et si elle est elle-même dérivable, la dérivée de f' est la dérivée seconde de f; on peut ainsi définir, de proche en proche, et pour certaines fonctions, des dérivées successives $f^{(n)}(z)$. Enfin si $u(z)$ et $v(z)$ sont dérivables à l'ordre n sur $\mathbb{D}$, on a

$$(uv)^{(n)}=\sum_{p=0}^{p=n} C_n^p\, u^{(n-p)}\, v^{(p)} \quad \text{(formule de Leibniz)}$$

• Par définition, une fonction dérivable en tout point d'un domaine $\mathbb{D}$ est dite holomorphe sur $\mathbb{D}$.

4. Transformation conforme définie par une fonction holomorphe

Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, appliquant le domaine $\mathbb{D}$ du plan complexe (Ox, Oy) dans le domaine Δ du même plan complexe.

Supposons que m, d'affixe z, décrive dans $\mathbb{D}$ la courbe paramétrée γ, définie par $z(t)=x(t)+iy(t)$ courbe admettant en chaque point une tangente, ce qui suppose que les fonctions $x(t)$, $y(t)$ du paramètre réel t sont dérivables. Alors, $Z=f(z)$ étant l'affixe de M, M décrit dans Δ une courbe Γ définie par $Z(t)=f[z(t)]=X(t)+iY(t)$, Γ est la transformée de γ par f. Soit mu la tangente en m à γ, MU la tangente en M à Γ.

On a, en des points associés m et M

$\frac{d\vec{m}}{dt}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ vecteur de mu; $\frac{d\vec{M}}{dt}=\begin{pmatrix}X'\\Y'\end{pmatrix}$ vecteur de MU.

On a donc $(Ox, mu)=\operatorname{Arg} z'(t)$

$(Ox, MU)=\operatorname{Arg} Z'(t)$ (à $k\pi$ près).

Or $Z'=f'[z(t)]\cdot z'(t)$ donc

$$\text{Arg } Z'(t) = \text{Arg } z'(t) + \text{Arg } [f'(z(t))]$$

d'où $(mu, MU) = (Ox, MU) - (Ox, mu) = \text{Arg } [f'(z(t))]$

Cet angle ne dépend que de la valeur numérique de t, donc si γ_1 est une autre courbe passant en m, Γ_1 sa transformée passant en M, mu_1 et MU_1 les tangentes en m et M à ces deux courbes, on a aussi

$$(mu_1, MU_1) = \text{Arg}[f'(z(t))] = \alpha$$

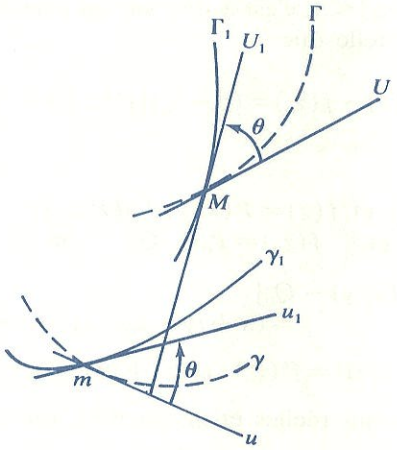


Figure 1.

Donc l'angle (MU, MU_1) déduit de (mu, mu_1) par une rotation d'angle α est égal à (mu, mu_1). Cet angle θ, angle des tangentes en m à γ et γ_1, est appelé angle des courbes γ et γ_1 en m. Il est égal à l'angle des courbes Γ et Γ_1, transformées de γ et γ_1, en M.

Le raisonnement qui précède suppose que ni m ni M ne sont des points stationnaires des courbes envisagées. Si m est un point stationnaire de γ, $z'(t) = 0$ et par conséquent $Z'(t) = 0$, ainsi M est un point stationnaire de Γ. Cependant en écrivant

$$(Ox, mu) = \lim_{h \to 0} \text{Arg } z'(t+h)$$

et

$$(Ox, MU) = \lim_{h \to 0} \text{Arg } Z'(t+h)$$

le raisonnement qui précède reste valable. Nous conclurons :

> La transformation $m(z) \underset{f}{\rightharpoonup} M(Z)$, dans laquelle f est une fonction holomorphe, conserve l'angle orienté de deux courbes : on dit que c'est une transformation conforme.

Notons en particulier que deux courbes tangentes en m ont pour transformées deux courbes tangentes en M.

5. Conditions de Cauchy

Revenons sur les conditions de dérivabilité d'une fonction $f(z)$ en un point z_0 de son domaine de définition : cette dérivabilité s'exprime par l'existence pour $|z-z_0|<\tau$, c'est-à-dire sur un disque ouvert de centre z_0 d'une fonction $\varepsilon(z)$ telle que

$$f(z)-f(z_0)=(z-z_0)[f'(z_0)+\varepsilon(z)]$$

$$\text{avec } \lim_{z\to z_0}\varepsilon(z)=0.$$

Donc si $z=x+iy$ et $f(z)=P(x,\,y)+iQ(x,\,y)$ $(x,\,y,\,P,\,Q$ réels)
si $z_0=x_0+iy_0$ et $f(z_0)=P_0+iQ_0$ on a

$$P(x,\,y)-P_0+i[Q(x,\,y)-Q_0]$$
$$=(x+iy-x_0-iy_0)[A+iB+\alpha(z)+i\beta(z)]$$

avec $$A+iB=f'(z_0)\quad \alpha(z)+i\beta(z)=\varepsilon(z)$$

En séparant parties réelles et imaginaires, on obtient

$$P-P_0=(x-x_0)(A+\alpha)-(y-y_0)(B+\beta) \qquad (1)$$
$$Q-Q_0=(x-x_0)(B+\beta)+(y-y_0)(A+\alpha) \qquad (2)$$

Dans (1) comme dans (2), $\lim_{z\to z_0}\alpha(z)=\lim_{z\to z_0}\beta(z)=0$, ceci quelle que soit la direction dans laquelle $M(z)\longrightarrow M_0(z_0)$.

Si en particulier $M\longrightarrow M_0$ suivant une parallèle à Ox, on a $y=y_0$ et

$$P-P_0=(x-x_0)(A+\alpha)\qquad Q-Q_0=(x-x_0)(B+\beta)$$

donc

$$A=\lim_{x\to x_0}\frac{P-P_0}{x-x_0}=\frac{\partial P}{\partial x}(M_0)\qquad B=\lim_{x\to x_0}\frac{Q-Q_0}{x-x_0}=\frac{\partial Q}{\partial x}(M_0)$$

Donc si f est dérivable en z_0, P et Q admettent en $(x_0,\,y_0)$ des dérivées partielles par rapport à x et $f'(z_0)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{M_0}$

Mais si $M\longrightarrow M_0$ suivant une parallèle à Oy, on a $x=x_0$

$$P-P_0=-(y-y_0)(B+\beta)\qquad Q-Q_0=(y-y_0)(A+\alpha)$$

donc $$B=-\frac{\partial P}{\partial y}(M_0)\qquad A=\frac{\partial Q}{\partial y}(M_0)$$

et $$f'(z_0)=\left(\frac{\partial Q}{\partial y}-i\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M_0}$$

On voit que si une fonction $f(z)$ est dérivable en z_0, ses parties réelle et imaginaire $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ satisfont en z_0 aux deux conditions :

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\partial P}{\partial y}\quad \text{(I)}$$

Examinons la réciproque. Supposons $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ continues ainsi que leurs dérivées sur un disque de centre z_0, et vérifiant en z_0 les conditions (I). Le théorème des accroissements finis permet d'écrire, pour $\sqrt{h^2+k^2}$ suffisamment petit, en posant $x-x_0=h,\ y-y_0=k$

$$P(x_0+h,\ y_0+k)-P(x_0,\ y_0)=h\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{M_0}+k\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M_0}+\sqrt{h^2+k^2}\cdot\varepsilon_1(h,\ k)$$

$$Q(x_0+h,\ y_0+k)-Q(x_0,\ y_0)=h\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{M_0}+k\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{M_0}+\sqrt{h^2+k^2}\cdot\varepsilon_2(h,\ k)$$

relations où ε_1 et ε_2 ont pour limites 0 quand $(h, k) \longrightarrow (0, 0)$.

Ajoutons à la première de ces relations le produit de la seconde par i, on obtient

$$\begin{aligned}f(z)-f(z_0)&=h\left(\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{M_0}+k\left(\frac{\partial P}{\partial y}+i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)_{M_0}+\sqrt{h^2+k^2}\cdot\varepsilon(h,\ k)\\&=C+\sqrt{h^2+k^2}\ \varepsilon(h,\ k)\end{aligned}$$

avec $\varepsilon=\varepsilon_1+i\varepsilon_2 \longrightarrow 0$ lorsque $(h, k) \longrightarrow (0, 0)$

Or, compte tenu des conditions (I), C peut s'écrire à volonté

$$C=h\left(\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+k\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}+i\frac{\partial P}{\partial x}\right)=(h+ik)\left(\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

ou

$$C=h\left(\frac{\partial Q}{\partial y}-i\frac{\partial P}{\partial y}\right)+k\left(\frac{\partial P}{\partial y}+i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)=(h+ik)\left(\frac{\partial Q}{\partial y}-i\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Il en résulte, puisque $h+ik=z-z_0$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_{M_0}=\left(\frac{\partial Q}{\partial y}-i\frac{\partial P}{\partial y}\right)_{M_0}$$

donc f est dérivable en z_0 et $f'(z_0)=\dfrac{\partial P}{\partial x}+i\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}-i\dfrac{\partial P}{\partial y}$

En résumé, nous avons établi le théorème fondamental suivant :

• Pour que la fonction $f(z)=P(x, y)+iQ(x, y)$, où $z=x+iy$, soit dérivable en un point z_0 de son domaine de définition, il faut que P, Q admettent en z_0 des dérivées partielles satisfaisant à

$$(I)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-\dfrac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$$

Ces conditions sont suffisantes, à la condition supplémentaire près que P, Q et leurs dérivées partielles soient continues sur un disque de centre z_0.

• Les deux conditions (I) sont appelées **conditions de Cauchy** en z_0.

Si elles sont vérifiées en un point z_0 particulier, elles expriment que f est monogène en z_0 (dérivable en ce point).

Si elles sont vérifiées sur un domaine, elles expriment que f est holomorphe sur ce domaine, nous pouvons donc énoncer encore :

> Pour qu'une fonction $f(z)=P(x, y)+iQ(x, y)$ soit holomorphe sur un domaine $\mathbb{D}$, il faut et il suffit que P, Q et leurs dérivées partielles soient continues sur $\mathbb{D}$ et vérifient, pour tout (x, y) de $\mathbb{D}$, les conditions de Cauchy :
>
> $$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y},\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\partial P}{\partial y}$$

• Si $f'(z)=0$ sur un domaine $\mathbb{D}$, $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}=0$, donc $f(z)$ est une constante.

Exemples.

a) Reprenons la fonction citée à la fin du paragraphe 1 :

$$f(z)=x+y-1+i(x-y+2)$$

Bien que définie et continue sur $\mathbb{C}$, elle n'est dérivable en aucun point, car $\dfrac{\partial P}{\partial x}=1$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial y}=-1\neq\dfrac{\partial P}{\partial x}$

b) La fonction $f(z)=y^2-x^2+i(y^2-2x)$, définie et continue sur $\mathbb{C}$, n'est pas holomorphe sur $\mathbb{C}$, car $\dfrac{\partial P}{\partial x}=-2x\neq\dfrac{\partial Q}{\partial y}=2y$ en général.

Cependant le système des conditions de Cauchy s'écrit

$$\begin{cases} -2x=2y \\ -2y=-2 \end{cases}$$

il est vérifié en un point et un seul $x=-1$, $y=1$.

$f(z)$ est donc dérivable en un seul point $z_0 = -1+i$ et $f'(z_0)=2(1-i)$.

c) La fonction $f(z)=x^2-y^2+2ixy$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, car elle est continue ainsi que les dérivées partielles de P et Q, et satisfait aux conditions de Cauchy. Elle est d'ailleurs égale à z^2 et, comme on l'a vu plus haut, $f'(z)=2z$.

6. Fonctions harmoniques conjuguées

Soit $f(z)=P(x, y)+iQ(x, y)$ holomorphe; supposons en outre que P et Q ont des dérivées partielles secondes continues. En dérivant respectivement par rapport à x et y les deux conditions de Cauchy, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 Q}{\partial y\,\partial x}=-\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

Il s'ensuit, d'après le théorème de Schwarz, que

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0 \quad \text{soit} \quad \Delta P=0$$

On démontrerait de même que $\Delta Q=0$. P et Q sont donc des fonctions harmoniques (fonctions dont le laplacien est nul).

Deux fonctions harmoniques P et Q satisfaisant aux conditions de Cauchy sont dites conjuguées.

$P(x, y)$ étant donnée harmonique, on peut déterminer à une constante additive près une fonction harmonique Q conjuguée de P, puisque $-\frac{\partial P}{\partial y}\,dx+\frac{\partial P}{\partial x}\,dy$ est une différentielle exacte (vu que $\Delta P=0$) et que par suite $\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial x}$ sont compatibles et expriment précisément $dQ=-\frac{\partial P}{\partial y}\,dx+\frac{\partial P}{\partial x}\,dy$. De même Q harmonique détermine à une constante près une fonction harmonique P conjuguée de Q.

Ainsi, à une constante près, une fonction holomorphe est connue dès que l'on se donne soit sa partie réelle, soit sa partie imaginaire, fonctions harmoniques.

Notons encore que les conditions de Cauchy équivalent à l'intégrabilité des formes différentielles $Q\,dx+P\,dy$ et $P\,dx-Q\,dy$.

Les courbes $P(x, y)=\lambda$, $Q(x, y)=\mu$, dont les transformées par f sont les droites $x=\lambda$, $y=\mu$, sont, comme ces deux droites, orthogonales puisque la transformation $z \longrightarrow f(z)$ est conforme. Il en résulte qu'une fonction holomorphe ne peut garder une valeur constante $\lambda+i\mu$ sur un arc

rectifiable de longueur non nulle passant en un point M_0 où $P=\lambda$, $Q=\mu$, puisqu'un tel arc ne peut appartenir à la fois à deux courbes orthogonales en M_0.

Il en est ainsi en particulier pour un point où $f(z)=0$: il existe un disque ouvert de centre $M_0(z_0)$, tel que $f(z_0)=0$, ne contenant aucun point $z\neq z_0$ où $f(z)=0$. On exprime cette propriété en disant que tout zéro d'une fonction holomorphe est isolé. L'existence d'un arc sur lequel $f(z)=0$ implique donc que f n'est pas holomorphe, tel est le cas de f définie par $z \longrightarrow \mathrm{Re}(z)$.

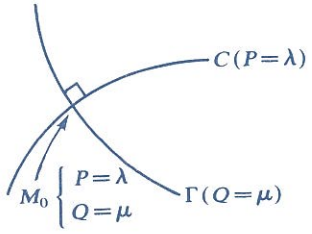


Figure 2.

7. Différentielle d'une fonction

En convenant que, dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, la différentiation est une opération linéaire, on est amené à poser

$$dz=d(x+iy)=dx+i\,dy$$

(différentielle de la variable)

f étant une fonction dérivable en un point z, on pose

$$\boxed{df(z)=f'(z)\,dz} \qquad (3)$$

(3) définit donc, et c'est l'usage courant, la notion de différentielle d'une fonction holomorphe sur un domaine $\mathbb{D}$.

Ainsi avec :

$$f(z)=P(x,\,y)+iQ(x,\,y)$$

$$df(z)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(dx+i\,dy)$$

$$=\frac{\partial P}{\partial x}dx-\frac{\partial Q}{\partial x}dy+i\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial x}dy\right)$$

$$=\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+i\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)$$

(d'après les conditions de Cauchy),

soit $\qquad df(z)=dP+i\,dQ$

Cette relation aurait pu être prise pour définition, même lorsque f n'est pas holomorphe, mais cette extension n'est pas d'usage courant.

B. FONCTIONS HOLOMORPHES ÉLÉMENTAIRES. FONCTIONS ANALYTIQUES

1. Fonctions rationnelles

Toute fonction polynôme est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Une fonction rationnelle est soit un polynôme, soit une fraction rationnelle, quotient de deux polynômes. Après simplification éventuelle par des facteurs communs, un tel quotient devient une fraction irréductible, où le numérateur et le dénominateur n'ont pas d'autres facteurs communs que des constantes; les pôles d'une fraction rationnelle sont les zéros du dénominateur; précisément a est un pôle d'ordre α (entier positif) de la fonction fraction $f(z)$ s'il est zéro d'ordre α de son dénominateur. Une fraction rationnelle est une fonction holomorphe sur tout domaine ne contenant aucun de ses pôles.

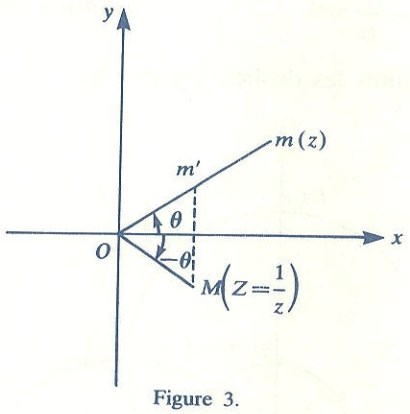


Figure 3.

2. Fonction $f(z)=\frac{1}{z}$. Abaque de Smith

L'application $z \rightsquigarrow \frac{1}{z}$ est définie sur $\mathbb{C}^*$ et associe bijectivement au point m d'affixe $z=re^{i\theta}$ $(r>0)$, le point M d'affixe $Z=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$.

Elle est donc le produit de l'inversion géométrique de pôle O et de module 1 ($m \rightsquigarrow m'$ tel que $\overline{Om}\cdot\overline{Om'}=1$) et de la symétrie d'axe Ox

($m \rightsquigarrow M$), ce produit étant commutatif. Elle est connue et utilisée sous le nom d'inversion complexe. L'application réciproque est $Z \rightsquigarrow f^{-1}(Z)=\frac{1}{Z}$, donc $f^{-1}=f$; une telle application (ou transformation) est dite involutive.

L'inversion géométrique est étudiée dans un exercice du tome 5, du chapitre 4 relatif aux coordonnées polaires. Les transformées de droites et cercles par l'inversion complexe en résultent. Il en sera aussi question dans le chapitre 4 du tome 4 consacré aux nombres complexes.

Dans le cadre actuel, notons que $f(z)=\frac{1}{z}$ étant holomorphe (sauf en $z=0$), l'inversion complexe est une transformation conforme. En écrivant $\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$, on voit que les courbes deux à deux orthogonales $P=\lambda$, $Q=\mu$ sont ici les cercles C_λ et Γ_μ d'équations :

$$x^2+y^2-\frac{x}{\lambda}=0 \qquad \text{(centrés sur } Ox\text{, passant par } O\text{)}$$

$$x^2+y^2+\frac{y}{\mu}=0 \qquad \text{(centrés sur } Oy\text{, passant par } O\text{)}$$

avec comme cas limites les droites Oy et Ox.

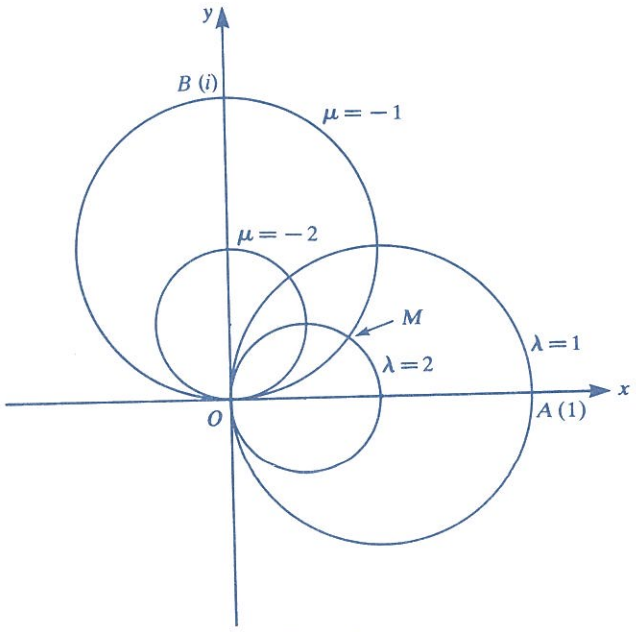


Figure 4.

On obtient ainsi deux faisceaux de cercles tangents en O respectivement à Oy et Ox. Le point commun M, autre que O, aux deux cercles C_λ et Γ_μ a pour affixe $z=\dfrac{1}{\lambda+i\mu}$. La construction d'un réseau serré de cercles C_λ et Γ_μ, repérés par les valeurs numériques de λ et μ, permet d'obtenir graphiquement, soit rigoureusement, soit le plus souvent par approximation, l'inverse d'un complexe donné : c'est l'abaque de Smith, utilisée en électricité et électronique. Sur la figure 4, M a pour affixe $\dfrac{1}{2-i}=\dfrac{2+i}{5}$.

3. Fonction homographique

Soit la transformation $z \longrightarrow Z=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ (4)

où a, b, c, d sont quatre nombres complexes donnés.

• Si $c=0$, la transformation se réduit à $Z=\alpha z+\beta$.

C'est une translation si $\alpha=1$; une similitude si $\alpha\neq 1$, le centre étant le point invariant $z_0=\dfrac{\beta}{1-\alpha}$, l'angle $\theta=\operatorname{Arg}\alpha$, le rapport $k=|\alpha|$.

• Supposons $c\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$ pour que Z ne se réduise pas à une constante. La transformation est définie et conforme pour $z\neq -\dfrac{d}{c}$. Par division, on obtient

$$Z=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\dfrac{d}{c}}$$

ou

$$Z=\alpha+\frac{\beta}{z+\gamma}$$

La transformation est donc le produit des transformations successives :

$z \rightsquigarrow z+\gamma$ translation de vecteur (γ)

$z+\gamma \rightsquigarrow \dfrac{1}{z+\gamma}$ inversion complexe

$\dfrac{1}{z+\gamma} \rightsquigarrow \dfrac{\beta}{z+\gamma}$ similitude de centre O, d'angle Arg β, de rapport $|\beta|$

$\dfrac{\beta}{z+\gamma} \rightsquigarrow Z$ translation de vecteur (α).

Il en résulte que la transformation homographique (4) transforme une droite ou un cercle en une droite ou un cercle : l'ensemble des cercles du

plan complexe, de rayon fini ou infini, est donc globalement invariant par f, que l'on appelle aussi, de ce fait, transformation circulaire.

• On peut classer les transformations homographiques selon le nombre de leurs points invariants : un tel point est donné par $z=\dfrac{az+b}{cz+d}$

donc $$cz^2+(d-a)z-b=0 \quad \text{où } c\neq 0.$$

• Si $\Delta=(d-a)^2+4bc\neq 0$ il y a deux points invariants z_1, z_2 et en écrivant
$$Z-z_1=\frac{az+b}{cz+d}-\frac{az_1+b}{cz_1+d}=\frac{(ad-bc)(z-z_1)}{(cz+d)(cz_1+d)}$$
$$Z-z_2=\frac{(ad-bc)(z-z_2)}{(cz+d)(cz_2+d)}$$
on arrive à l'expression de $z \curvearrowright Z$ sous la forme dite canonique :
$$\frac{Z-z_1}{Z-z_2}=\lambda\frac{z-z_1}{z-z_2} \tag{5}$$

Si A et B sont les points d'affixes z_1 et z_2, et si $\lambda=re^{i\theta}$, (5) exprime que $\dfrac{MA}{MB}=r\dfrac{mA}{mB}$ et $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\theta+(\overrightarrow{mA},\overrightarrow{mB})$. Or $\dfrac{MA}{MB}=k$ exprime que M appartient au cercle de diamètre IJ, I et J divisant AB dans le rapport k, cercle qui appartient au faisceau de points limites A et B; $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\varphi$ exprime que M appartient à un arc de cercle d'extrémités A et B, arc qui coupe le cercle précédent en un point unique, d'où une construction géométrique simple du point M connaissant m. Chacun des faisceaux de cercles de points limites A et B, et de points de base A et B est donc globalement invariant par f (fig. 5).

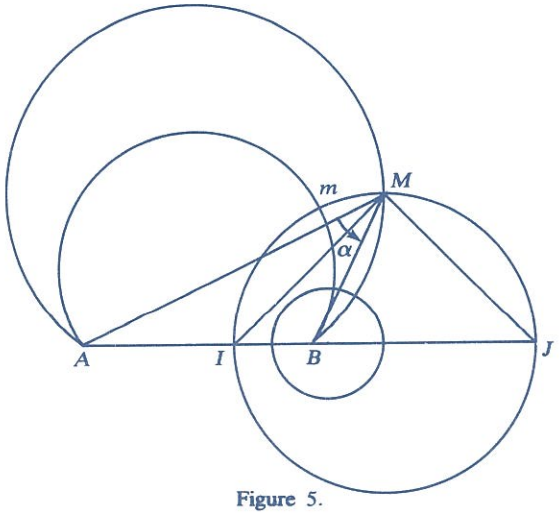


Figure 5.

(5) exprime en outre que le **birapport** $\dfrac{Z-z_1}{Z-z_2} : \dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ est constant lorsque $Z=f(z)$. Ce birapport se représente par la notation (Z, z, z_1, z_2).

• Si $\Delta=0$, il y a un seul point invariant z_1, et la comparaison de $Z-z_1$ et $z-z_1$ par un calcul analogue au précédent montre que $\dfrac{1}{Z-z_1}=\dfrac{1}{z-z_1}+h$ où h est une constante.

Il est souvent utile, notamment en mécanique des fluides, de réaliser une application conforme d'un domaine $\mathbb{D}$ imposé dans un autre domaine Δ imposé. Des transformations homographiques résolvent parfois ce problème. Par exemple $Z=e^{i\theta}\cdot\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}$, où a est donné, avec $\mathrm{Im}(a)>0$, applique le demi-plan $y>0$, défini par $\left|\dfrac{z-a}{z-\bar{a}}\right|<1$ (fig. 6) sur le disque $|Z|<1$ intérieur du cercle trigonométrique, et cette application est bijective et conforme.

Nous allons étudier une autre transformation qui joue un rôle analogue, mais qui n'est pas homographique.

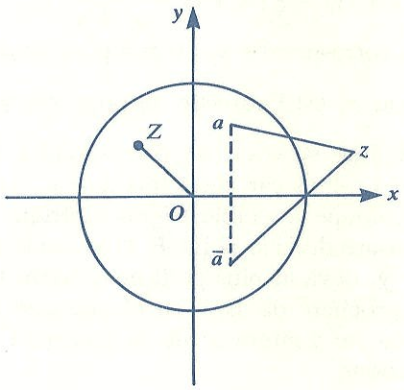


Figure 6.

4. Transformation de Joukovski

On appelle ainsi la transformation

$$z \rightsquigarrow Z=f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

f est holomorphe pour $z\neq 0$, et définit une transformation conforme. Elle n'est pas bijective sur $\mathbb{C}$ car $f\left(\dfrac{1}{z}\right)=f(z)$, mais comme

$|z|<1 \iff \left|\frac{1}{z}\right|>1$, on peut définir une application réciproque de $\mathbb{C}$ sur l'intérieur du cercle trigonométrique. Ses points invariants sont $z=\pm 1$.

On peut construire $M(Z)$ connaissant $m(z)$: M est le milieu de mm', si m' désigne le transformé de m par l'inversion complexe.

Si m_1 est le symétrique de m' par rapport à Oy, le cercle $(mm'm_1)$, centré sur Oy, coupe Ox en A et B tels que

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB} = -OA^2 = \overline{Om}\cdot\overline{Om_1} = -1$$

donc A et B sont les points d'affixes $+1$ et -1, points invariants par f.

Si γ_1 et γ_2 sont respectivement l'arc supérieur et l'arc inférieur d'un tel cercle γ, γ_1 et γ_2 ont même transformé : un arc Γ joignant A et B, mm' coupant Oy en I et Ox en P, la division $(IPmm')$ est harmonique et AB est le polaire de I par rapport à γ, I est donc indépendant de m décrivant γ_1. C'est le point commun à Oy et aux tangentes en A et B à γ, et l'arc $\overset{\frown}{AB}$ décrit par M fait partie du cercle de diamètre IJ, J étant le centre de γ (fig. 7).

Si γ_3 est un cercle tangent en A à γ et entourant le point B, sa transformée est une courbe fermée Γ_3 partant de A et revenant en A.

Cette courbe coupe Ox en deux points M_1 et M_2 qui annulent la partie imaginaire Q de $f(x+iy)=\frac{1}{2}\left(x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)$.

M_1 par exemple correspond à $y=0$ et a pour abscisse $P_1=P(x_1, 0)=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)<-1$, car x_1 est l'abscisse du point où γ_3 coupe Ox, abscisse qui est négative (et même <-1); M_2 correspond à $x^2+y^2=1$ et a pour abscisse $P_2=x_2\in\,]-1, +1[$ car cette fois $x=x_2$ est l'abscisse du point, distinct de A, où γ_3 coupe le cercle trigonométrique.

La courbe Γ entoure donc le point B. Une étude graphique immédiate montre que lorsque γ_3 devient plus petit en gardant la même tangente en A, M_1 et M_2 se rapprochent de B, il en résulte que f applique l'intérieur d'un cercle γ_3 donné sur l'intérieur de la courbe Γ_3 correspondante, et l'extérieur sur l'extérieur.

En observant de plus que $\frac{dZ}{dz}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$ s'annule en $z=1$, on voit que A est un point stationnaire, donc un point de rebroussement, puisque $\frac{d^2Z}{dz^2}=\frac{1}{z^3}$ ne s'annule pas, pour la courbe Γ_3. Enfin l'arc Γ, qui est un cas limite de la transformée d'un cercle tel que γ_3, est intérieur à Γ_3, donc tangente en A à Γ_3. Il en résulte pour Γ_3 la forme indiquée sur la figure 8.

Ces considérations sont utilisées en aérodynamique pour le calcul du profil des ailes d'avion : une section de la forme Γ_3 est appelée un **profil Joukovski,** et la transformation de Joukovski, conforme, ramène en quelque sorte les problèmes d'écoulement de l'air autour d'une telle aile à ceux

autour d'une surface cylindrique, lesquels font intervenir les fonctions de Bessel (ou fonctions cylindriques) qui seront l'objet d'une étude ultérieure.

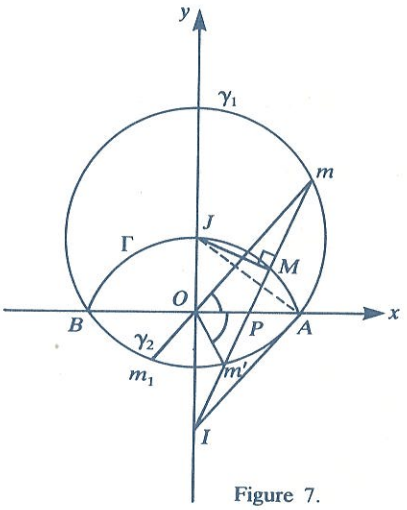


Figure 7.

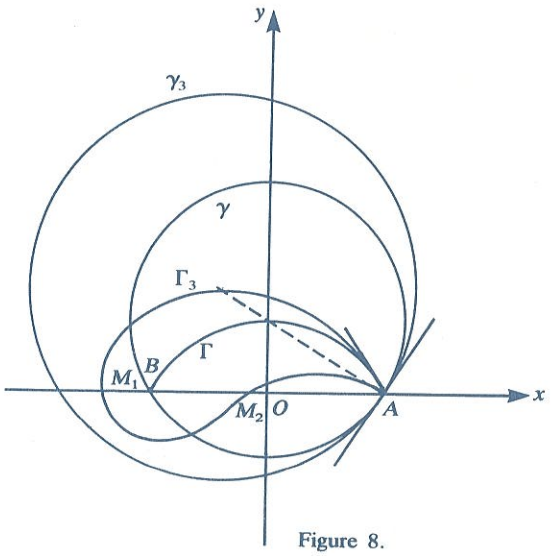


Figure 8.

5. Fonction définie par une série entière. Fonction analytique

On sait qu'une série entière de terme général $u_n(z)=a_n z^n$ de rayon de convergence $R>0$, définit, sur le disque ouvert de convergence $|z|<R$, une fonction $f(z)=\sum_0^{+\infty} a_n z^n$.

Seules ont été étudiées jusqu'ici les opérations algébriques sur de telles fonctions. Nous allons ici chercher si $f(z)$ est holomorphe.

Pour cela posons $g(z)=\sum_{1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}=\sum_{1}^{+\infty} u'_n(z)$

• Cherchons quel est le rayon de convergence de la série précédente.

Soit R' ce rayon : c'est aussi celui de la série réelle $\sum_{1}^{+\infty} n|a_n|\rho^{n-1}$, dans laquelle $\rho=|z|$. Or cette série, d'après la dérivation terme à terme d'une série entière réelle, est la dérivée de $\sum_{1}^{+\infty} |a_n|\sigma^n$ dont le rayon de convergence est R. On sait que dans $\mathbb{R}$ la dérivation ne modifie pas le rayon de convergence, on a donc $R'=R$. $f(z)$ et $g(z)$ sont donc toutes deux définies sur le disque $|z|<R$, avec prolongement possible pour l'une ou pour l'autre en certains points du cercle $|z|=R$.

• Il reste à voir si, en un point z_0 de $\mathbb{D}$, disque $|z|<R$, $g(z_0)$ est la limite de $\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ quand $h \longrightarrow 0$.

Formons l'expression

$$\Delta=\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}-g(z_0)=\frac{1}{h}\left[\sum_{0}^{+\infty} a_n (z_0+h)^n-\sum_{0}^{+\infty} a_n z_0^n\right]$$

$$-\sum_{1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}$$

$$=\sum_{1}^{+\infty} a_n\left[\frac{(z_0+h)^n-z_0^n}{h}-nz_0^{n-1}\right].$$

Comme $(z_0+h)^n-z_0^n=C_n^1 hz_0^{n-1}+C_n^2 h^2 z_0^{n-2}+\ldots+C_n^n h^n$

Δ s'écrit encore :

$$\Delta=\sum_{1}^{+\infty} a_n (C_n^2 hz_0^{n-2}+C_n^3 h^2 z_0^{n-3}+\ldots+h^{n-1})$$

Si nous posons $|h|=k$, $|z_0|=\rho_0$, nous avons donc

$$|\Delta|\leqslant\sum_{1}^{+\infty} |a_n|(C_n^2 k\rho_0^{n-2}+C_n^3 k^2 \rho_0^{n-3}+\ldots+k^{n-3})=A(k)$$

Or, si $\sum_{0}^{+\infty} |a_n|\rho^n = \varphi(\rho)$ on a vu que

$$\sum_{1}^{+\infty} n|a_n|\rho^{n-1} = \varphi'(\rho_0) = \lim_{k\to 0} \frac{\varphi(\rho_0+k)-\varphi(\rho_0)}{k}$$

et $A(k)$ est précisément $\dfrac{\varphi(\rho_0+k)-\varphi(\rho_0)}{k} - \varphi'(\rho_0)$ qui tend vers 0 avec k. Il en résulte que $\lim_{k\to 0} \Delta = 0$, f est dérivable en z_0 et $f'(z_0) = g(z_0)$. Ceci est vrai pour tout z_0 de $\mathbb{D}$, nous pouvons donc énoncer :

• Toute fonction définie par une série entière $f(z) = \sum_{0}^{+\infty} a_n z^n$ est holomorphe sur son disque ouvert de convergence $|z| < R$; sa dérivée peut être obtenue par dérivation terme à terme : $f'(z) = \sum_{1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$.

• Conséquences : $f'(z)$ est elle-même holomorphe sur ce même disque, ainsi que ses dérivées successives. Ainsi :

> Une fonction définie par une série entière est indéfiniment dérivable sur son disque ouvert de convergence, une telle **fonction** est dite **analytique.**

6. Fonctions usuelles définies par des séries entières

• La plus simple est e^z déjà introduite dans le chapitre relatif aux séries entières. Rappelons que

$$\boxed{e^z = \sum_{0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}} \quad \text{pour tout } z \text{ complexe } (R = \infty).$$

e^z est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et a pour dérivée $\sum_{1}^{+\infty} \dfrac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{1}^{+\infty} \dfrac{z^{n-1}}{(n-1)!} = e^z$,

donc $(e^z)' = e^z$ et $(e^z)^{(n)} = e^z$.

On a vu que si $z = x + iy$, x et y étant réels $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, en particulier $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, de période 2π, d'où on conclut :

— la fonction exponentielle e^z est périodique, de période complexe $2i\pi$.

• Nous pouvons maintenant définir sur $\mathbb{C}$ les fonctions holomorphes :

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}=\sum_{0}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{(période } 2i\pi\text{)}$$

$$\operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}=\sum_{0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{(période } 2i\pi\text{)}$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\operatorname{ch} iz=\sum_{0}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{(période } 2\pi\text{)}$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=-i\operatorname{sh} iz=\sum_{0}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{(période } 2\pi\text{)}$$

Enfin

$$\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \qquad \left(\text{période } i\pi,\ z\neq i\frac{\pi}{2}+ik\pi\right)$$

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z} \qquad \left(\text{période } \pi,\ z\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$$

$$\operatorname{coth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \qquad \text{(période } i\pi,\ z\neq ik\pi\text{)}$$

$$\operatorname{cotg} z=\frac{\cos z}{\sin z} \qquad \text{(période } \pi,\ z\neq k\pi\text{)}$$

Toutes ces fonctions, sur leurs domaines de définition, obéissent aux mêmes règles de calcul (dérivation, formules d'addition et de transformation) que sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par exemple,

$$\begin{aligned}\cos(x+iy)&=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy\\&=\cos x\operatorname{ch} y+i\sin x\operatorname{sh} y\end{aligned}$$

on vérifie que $P=\cos x\operatorname{ch} y$ et $Q=\sin x\operatorname{sh} y$ sont des fonctions harmoniques conjuguées, et :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\cos z)}{\mathrm{d}z}&=\frac{\partial P}{\partial x}+i\frac{\partial Q}{\partial x}\\&=-\sin x\operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y=-\sin z.\end{aligned}$$

On vérifie le même résultat par les séries entières.

7. Fonction logarithmique. Notion de coupure

Nous l'introduirons en cherchant si la fonction exponentielle admet une fonction réciproque, c'est-à-dire s'il existe $Z=f(z)$ définie par $e^{Z}=z$.

Si $|z|=\rho$ et $\operatorname{Arg} z=\theta$ et si $Z=X+iY$ (X, Y réels) on a $|e^Z|=e^X=\rho$ d'où $X=\ln\rho$ défini si $z\neq 0$ et $\operatorname{Arg} e^Z=Y=\theta+2k\pi$ d'où $Y=\theta+2k\pi$ k entier.

Il en résulte que pour tout z complexe non nul,

$$e^Z=z \iff Z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z+2ik\pi, \qquad k \text{ entier.}$$

L'indétermination sur l'entier k était prévisible, vu la périodicité de la fonction exponentielle, et comparable par exemple à celle qui apparaît quand on cherche à résoudre $\operatorname{tg} y=x$ pour définir la fonction arc tangente.

La fonction $Z=f(z)$ ainsi introduite, sans précision sur k est ce que l'on appelle une fonction **multiforme,** qui prend plusieurs valeurs ou **déterminations** pour chaque valeur de z. Pour supprimer cette ambiguïté et rendre la fonction **uniforme,** nous imposerons à Y, partie imaginaire de Z, la condition $-\pi<Y\leqslant\pi$. Il y a évidemment, pour tout $z\neq 0$, un choix unique de son argument réalisant cette double inégalité, et la fonction $f(z)$ ainsi précisée sera, par définition, la fonction logarithme népérien de z notée Log z ou ln z.

En résumé :

$$\boxed{Z=\ln z \iff \begin{cases} e^Z=z \\ \operatorname{Im} Z\in\,]-\pi,\,+\pi] \end{cases}} \qquad (z\neq 0)$$

On aura donc $\boxed{\ln z=\ln|z|+i(\operatorname{Arg} z+2k\pi)}$

l'entier k étant cette fois choisi tel que $-\pi<\operatorname{Arg} z+2k\pi\leqslant\pi$.

Étudions les propriétés de cette fonction ln z.

• Elle est définie sur $\mathbb{C}^*$ et réalise une application bijective de $\mathbb{C}^*$ sur la bande du plan complexe $-\pi<y\leqslant\pi$. Les autres déterminations de $f(z)$ se déduisent par des translations de $2k\pi$ parallèles à Oy et il y en a une par bande $-\pi+2k\pi<y\leqslant\pi+2k\pi$.

• Si le point $m(z)$ décrit un arc $\overset{\frown}{AB}$ ne traversant pas le demi-axe réel négatif (fig. 9), on peut choisir pour tout z un argument $\theta\in\,]-\pi,\,+\pi]$ qui varie de façon continue sur $\overset{\frown}{AB}$, ainsi que $|z|$, la fonction $\ln z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z$ est alors continue sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Mais si $\overset{\frown}{AB}$ coupe le demi-axe Ox' en un point $m_0(z_0=-x_0,\ x_0>0)$, l'argument de z, compris entre $-\pi$ et $+\pi$ par exemple en $m_1(z_1)$ au-dessus de $x'x$, devient supérieur à π en $m_2(z_2)$ au-dessous de $x'x$ (fig. 10), et si $\operatorname{Arg} z_1=\pi-\alpha$, $\operatorname{Arg} z_2=\pi+\beta$, α et β étant positifs et petits, on a :

$$\operatorname{Im}(\ln z_1)=\pi-\alpha, \text{ mais } \operatorname{Im}(\ln z_2)=\pi+\beta-2\pi=-\pi+\beta$$

On voit que $\operatorname{Im}(\ln z)$, et par suite ln z, subit une discontinuité quand z franchit la valeur z_0, plus précisément ln z effectue un **saut** de $-2i\pi$ quand z passe de $-x_0+i\cdot 0^+$ à $-x_0+i\cdot 0^-$.

Il va de soi que si $\widehat{AB}$ passe par O, $\ln z$ cesse d'être défini au passage en 0.

Nous concluons en disant que la fonction $\ln z$ est continue sur tout domaine ne contenant aucun point du demi-axe réel négatif ($x \leqslant 0$). Pour éviter ce type de difficulté, on introduit la notion de **coupure** du plan complexe, qui consiste ici à interdire au point $m(z)$ du plan complexe un domaine δ constitué, par exemple, d'une demi-bande de plan $x \leqslant 0, |y| < \varepsilon$ complétée par un demi-disque $x \geqslant 0, |z| < \varepsilon$ (fig. 11), ε étant positif aussi petit que l'on veut. La fonction $\ln z$ est alors uniforme et continue sur le plan complexe ainsi coupé, en particulier sur un domaine tel que $\mathbb{D}$.

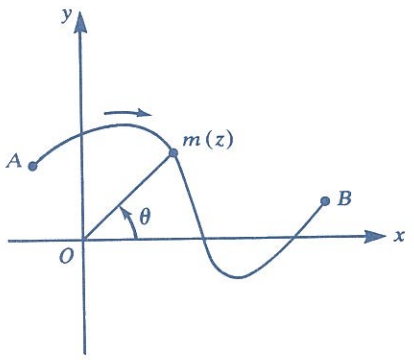


Figure 9.

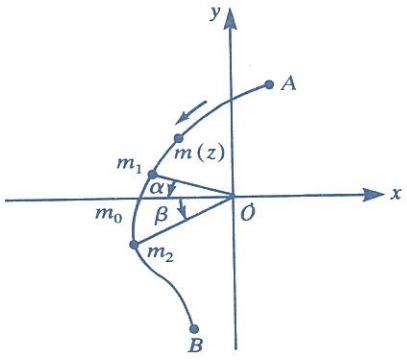


Figure 10.

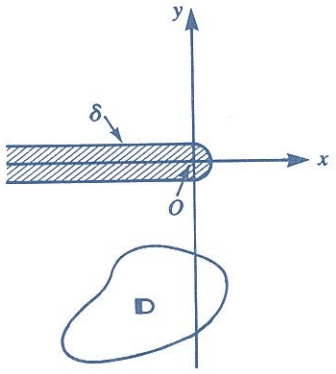


Figure 11.

Il résulte des définitions et propriétés précédentes que l'extension à $\mathbb{C}$ des propriétés usuelles de la fonction logarithmique dans $\mathbb{R}$ n'est, en général, pas valable, ou du moins exige des précautions. Ainsi on n'a pas $\forall z_1, z_2, \quad \ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$, puisque $\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$ peut varier de -2π à $+2\pi$.

De même $\ln z^n = n \ln z + 2ik\pi$ (si n entier) k à discuter.

• Voyons si $\ln z$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} - \delta$.

En posant $z - z_0 = h$ et $\ln z_0 = Z_0$, $\ln(z_0 + h) = Z_0 + k$, $h \longrightarrow 0 \iff k \longrightarrow 0$

on a $$\frac{\ln(z_0+h) - \ln z_0}{h} = \frac{k}{e^{Z_0+k} - e^{Z_0}} \xrightarrow[k\to 0]{} \frac{1}{e^{Z_0}} = \frac{1}{z_0}$$

il en résulte que sur le plan coupé suivant Ox', $\ln z$ est holomorphe, et

$$\boxed{(\ln z)' = \frac{1}{z}}$$

• Par analogie avec la définition de e^z comme somme d'une série, cherchons si $\sum_1^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} = \varphi(z)$, dont le disque de convergence est $|z| < 1$, représente sur ce disque $\ln(1+z)$. On a

$$\varphi'(z) = \sum_1^{+\infty} (-1)^{n-1} z^{n-1} = \frac{1}{1+z} = [\ln(1+z)]'$$

donc si on pose $g(z) = \varphi(z) - \ln(1+z)$, on a $g'(z) = 0$, $g(z) = C$ constante. $z = 0$ fournit $C = 0$. On peut conclure :

$$\ln(1+z) = \sum_1^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \text{ pour } |z| < 1$$

Envisageons $|z| = 1$. Nous savons déjà que le développement est valable pour $z = 1$, et ne l'est évidemment pas pour $z = -1$. Pour $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, +\pi[$, on obtient

$$\sum_1^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos n\theta}{n} + i \sum_1^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin \theta}{n}$$

et en posant $\theta = \pi + \alpha$, on a pour $\alpha \neq 2k\pi$ des séries de Fourier où a_n et b_n sont de signes constants (ici négatifs), de valeurs absolues décroissantes et tendant vers 0, donc ces séries convergent. En admettant la continuité de $f(z)$ en un point de son cercle de convergence où elle est définie, vis-à-vis des points venant de l'intérieur du cercle, on aura donc

$$\ln(1 + e^{i\theta}) = \ln(1 + \cos\theta + i \sin\theta) = \ln\rho + i\varphi$$

avec $\rho^2 = (1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 2(1+\cos\theta) = 4\cos^2\frac{\theta}{2}$, $\rho = 2\cos\frac{\theta}{2}$

et $\cos\varphi=\dfrac{1+\cos\theta}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}=\cos\dfrac{\theta}{2}$, $\sin\varphi=\dfrac{\sin\theta}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}=\sin\dfrac{\theta}{2}$, donc $\varphi=\dfrac{\theta}{2}$,

ce qui donne les deux séries de Fourier classiques :

$$\theta=2\sum_{1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin n\theta}{n}\qquad\theta\in]-\pi,+\pi[$$

$$\ln\cos\frac{\theta}{2}=-\ln 2+\sum_{1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos n\theta}{n}\qquad\theta\in]-\pi,+\pi[$$

La première reste valable pour $\theta=\pm\pi$, mais est discontinue en ces points. La seconde n'a plus de sens $\left(\text{divergente, et } \ln\cos\dfrac{\theta}{2} \text{ non défini}\right)$ pour $\theta=\pm\pi$.

8. Autres fonctions classiques

• La fonction **puissance** z^α, où α est un complexe donné, peut être définie sur $\mathbb{C}^*$ par

$$\boxed{z^\alpha=e^{\alpha\ln z}.}$$

Sa dérivée est $(z^\alpha)'=e^{\alpha\ln z}\cdot\dfrac{\alpha}{z}=e^{\alpha\ln z}\cdot\alpha e^{-\ln z}$

donc $$(z^\alpha)'=\alpha z^{\alpha-1}$$

Comme $\ln z$, cette fonction est définie et continue sur le plan complexe coupé suivant Ox'. Cependant, pour des valeurs entières de α, notamment pour $\alpha=\dfrac{1}{2}$, on conserve souvent z^α (par exemple $\sqrt{z}$) sans autre précision, comme fonction multiforme : pour $z=\rho e^{i\theta}$, $\sqrt{z}$ admet les deux déterminations $\varphi_1(z)=\sqrt{\rho}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $\varphi_2(z)=-\varphi_1(z)$, chacune est une fonction continue sur $\mathbb{C}$.

• Plus généralement $[u(z)]^{v(z)}=e^{v(z)\cdot\ln u(z)}$ définie pour $u(z)\neq 0$.

• On peut encore définir à l'aide de la fonction logarithmique les fonctions trigonométriques et hyperboliques réciproques; par exemple, définissons Arc tg $z=Z$ en partant de

$$z=\operatorname{tg} Z=\frac{e^{iZ}-e^{-iZ}}{i(e^{iZ}+e^{-iZ})}=\frac{1}{i}\,\frac{e^{2iZ}-1}{e^{2iZ}+1}$$

Un calcul simple donne $e^{2iZ}=\dfrac{1+iz}{1-iz}$

$Z=f(z)$ a donc pour période π, et nous pouvons choisir la détermination telle que

$$2iZ=\ln\frac{1+iz}{1-iz}$$

d'où la définition

$$\boxed{\text{Arc tg } z=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}} \quad (z\neq\pm i) \tag{6}$$

à rapprocher de $\text{Arg th } x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ pour $|x|<1$, x réel, formule qui d'ailleurs reste valable sur $\mathbb{C}$.

Un calcul simple donne encore à partir de (6) : $(\text{Arc tg } z)'=\dfrac{1}{1+z^2}$.

Pour $z=x$, réel, si nous posons $x=\text{tg }\theta$, $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},+\dfrac{\pi}{2}\right[$, (1) donne

$$\text{Arc tg } x=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+i\text{ tg }\theta}{1-i\text{ tg }\theta}=\frac{1}{2i}\ln e^{2i\theta}=\theta$$

la définition (6) dans $\mathbb{C}$ prolonge donc celle connue dans $\mathbb{R}$.

Enfin on établit, soit à partir de (6), soit par une méthode identique à celle utilisée plus haut pour $\ln(1+z)$, le développement en série entière

$$\text{Arc tg } z=\sum_{0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1},\quad |z|<1$$

Arc tg z est donc une fonction analytique sur le disque $|z|<1$.

C. INTÉGRATION DANS LE CHAMP COMPLEXE. THÉORÈME DE CAUCHY

1. Définition de l'intégration sur un arc

Soit $\overset{\frown}{AB}$ un arc continu du plan complexe, décomposable en un nombre fini d'arcs possédant en chaque point une tangente. Soit $f(z)$ une fonction définie sur un domaine $\mathbb{D}$ contenant l'arc $\overset{\frown}{AB}$, fonction que nous définissons par $P(x,y)+iQ(x,y)$ avec $z=x+iy$, (x, y, P, Q sont évidemment réels).

Si $\overset{\frown}{AB}$ possède en chaque point une tangente, l'affixe $z(t)$ d'un point M de $\overset{\frown}{AB}$, exprimé en fonction d'un paramètre réel, est différentiable, et si le paramétrage correspondant réalise une bijection de $[t_1, t_2]$ dans $\overset{\frown}{AB}$, on peut définir l'intégrale de $f(z)\,dz$ sur l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ par

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f[z(t)]\,z'(t)\,dt$$

Si $\overset{\frown}{AB}$ se décompose en plusieurs arcs du type précédent, pouvant se raccorder par des points anguleux, $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz$ est la somme des intégrales de f sur les arcs successifs rencontrés de A vers B.

A priori, I pourrait dépendre du paramétrage choisi pour l'arc $\overset{\frown}{AB}$. En fait, il n'en est rien, car I peut s'écrire aussi

$$I = \int_{\overset{\frown}{AB}} (P + iQ)(dx + i\,dy) = \int_{\overset{\frown}{AB}} (P\,dx - Q\,dy) + i\int_{\overset{\frown}{AB}} (Q\,dx + P\,dy)$$

et ces deux intégrales curvilignes ne dépendent pas du paramétrage.

Dans les hypothèses du premier alinéa, on peut donc sans ambiguïté définir l'intégrale $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz$, le calcul dans le cas général se ramenant à celui de deux intégrales curvilignes. $\overset{\frown}{AB}$ est l'arc ou chemin d'intégration.

Exemple.

Calculons $\int_{\overset{\frown}{OB}} (xy + i(x+y))\,dz$ sur le chemin OAB de la figure 12 : $\overrightarrow{OA}$ est un vecteur, $\overset{\frown}{AB}$ est un arc de cercle de centre O.

Elle se décompose, en paramétrant $\overrightarrow{OA}$ par x et $\overset{\frown}{AB}$ par θ, en

$$I_1 = \int_{OA} f(z)\,dz = \int_0^1 (x^2 + 2ix)(dx + i\,dx)$$
$$= \int_0^1 (x^2 - 2x)\,dx + i\int_0^1 (x^2 + 2x)\,dx$$
$$= -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}i$$

et $I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos\theta\sin\theta + i\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta))\sqrt{2} \cdot (-\sin\theta + i\cos\theta)\,d\theta$

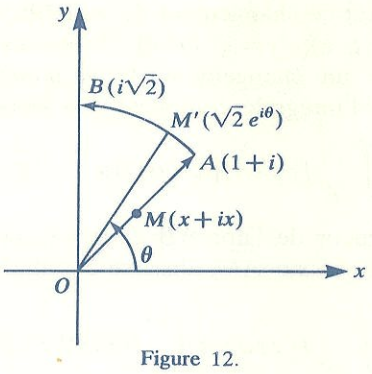


Figure 12.

$$= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sqrt{2}\sin^2\theta\cos\theta - \cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$
$$+ 2i\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{2}\cos^2\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta - \sin^2\theta)\,d\theta$$

ce qui donne après calculs : $I_2 = -\frac{2}{3}(\sqrt{2}+1) - \frac{\pi}{2} + i\left[-\frac{2}{3} - \frac{\pi}{3}\right]$

D'où $$I_1 + I_2 = I = -\frac{2}{3}(\sqrt{2}+2) - \frac{\pi}{3} + i\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

2. Propriétés de l'intégration

a) Il résulte de la définition et de la linéarité de l'intégration dans $\mathbb{R}$, que pour tous λ et μ complexes et f, g intégrables sur $\overset{\frown}{AB}$, on a

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} [\lambda f(z) + \mu g(z)]\,dz = \lambda\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz + \mu\int_{\overset{\frown}{AB}} g(z)\,dz.$$

L'intégration est donc une **opération linéaire.**

b) De la définition même résulte aussi, C étant un point quelconque de AB :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz = \int_{\overset{\frown}{AC}} f(z)\,dz + \int_{\overset{\frown}{CB}} f(z)\,dz$$

On peut, de ce fait, étendre la définition à une fonction définie seulement, par exemple, sur l'arc $\overset{\frown}{AC}$ et l'arc $\overset{\frown}{CB}$ ouverts en C, et possédant en C des limites finies distinctes.

c) On peut, dans une intégrale, effectuer un changement de variable $z = \varphi(u)$ définissant une application bijective différentiable de l'arc $\overset{\frown}{AB}$

sur un arc $\overrightarrow{CD}$. En effet ce changement de variable complexe, qui peut se traduire par $x=\varphi_1(t, v)$, $y=\varphi_2(t, v)$, fonctions réelles de t et v ($u=t+iv$), exprime un changement de variables dans les intégrales curvilignes définissant l'intégrale complexe. On arrive ainsi à

$$\int_{\overrightarrow{AB}} f(z)\,dz=\int_{\overrightarrow{CD}} f[\varphi(u)]\,\varphi'(u)\,du \qquad (\varphi \text{ est holomorphe})$$

d) Soit l la longueur de l'arc $\overrightarrow{AB}$ et $\mu=\sup|f(z)|$, $z\in\overrightarrow{AB}$.

Paramétrons $\overrightarrow{AB}$ par $s=\overrightarrow{AM}$, abscisse curviligne de M d'affixe z, on aura

$$I=\int_{\overrightarrow{AB}} f(z)\,dz=\int_0^l f[z(s)]\,z'(s)\,ds$$

Or $z'(s)=\dfrac{dx}{ds}+i\dfrac{dy}{ds}=e^{i\theta(s)}$, puisque le vecteur $\vec{T}\left(\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}\right)$ est unitaire. En appelant $\rho(s)$ et $\varphi(s)$ le module et l'argument de $f[z(s)]$, A et α ceux de I, on a

$$Ae^{i\alpha}=\int_0^l \rho(s)\,e^{i\varphi(s)}\,e^{i\theta(s)}\,ds \quad \text{donc } A=\int_0^l \rho(s)\,e^{i[\varphi(s)+\theta(s)-\alpha]}\,ds$$

En posant $\beta(s)=\varphi(s)+\theta(s)-\alpha$,

$$A=\int_0^l \rho(s)\cos\beta(s)\,ds+i\int_0^l \rho(s)\sin\beta(s)\,ds$$

Or A est réel, la seconde intégrale est donc nulle, et d'après l'intégration dans $\mathbb{R}$, on a

$$A=\int_0^l \rho(s)\cos\beta(s)\,ds\leqslant\int_0^l \rho(s)|\cos\beta(s)|\,ds\leqslant\int_0^l \mu\,ds=\mu l$$

D'où la formule de majoration du module d'une intégrale :

> Si $\mu=\sup|f(z)|$, $z\in\overrightarrow{AB}$ et $l=$longueur de $\overrightarrow{AB}$
>
> $$\left|\int_{\overrightarrow{AB}} f(z)\,dz\right|\leqslant\mu l$$

3. Intégration d'une fonction holomorphe. Théorème de Cauchy

Soit $\mathbb{D}$ un domaine simplement connexe, c'est-à-dire, rappelons-le, tel que l'intérieur de toute courbe fermée tracée sur $\mathbb{D}$ soit inclus dans $\mathbb{D}$. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans $\mathbb{D}$ et soit C une courbe fermée incluse dans $\mathbb{D}$, sur laquelle nous choisissons comme sens positif le sens trigonométrique direct. Considérons $I=\int_{C^+} f(z)\,dz$.

Avec les notations habituelles, $z=x+iy$, $f(z)=P(x, y)+iQ(x, y)$ on a vu que $I=\int_{C^+} P\,dx-Q\,dy+i\int_{C^+} Q\,dx+P\,dy$

D'après la formule de Riemann, si on désigne par Δ le domaine fini fermé limité par C (l'intérieur de C, frontière comprise), on a

$$I=\iint_{\Delta}\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy+i\iint_{\Delta}\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Or, f étant holomorphe, $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\partial P}{\partial y}$, en tout point de Δ, ces deux intégrales sont donc nulles et I l'est aussi.

D'où le théorème de Cauchy :

• Si la fonction $f(z)$ est holomorphe sur le domaine $\mathbb{D}$ simplement connexe et si C est une courbe fermée incluse dans $\mathbb{D}$, on a :

$$\int_{C^+} f(z)\,dz=0$$

Remarquons que l'on a aussi $\int_{C^-} f(z)\,dz=0$.

Conséquences.

• Si A et B sont deux points d'un domaine $\mathbb{D}$ simplement connexe, Γ_1 et Γ_2 deux arcs de $\mathbb{D}$ reliant A et B, parcourus de A vers B, on a $\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz=\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$, f étant holomorphe sur $\mathbb{D}$.

Autrement dit pourvu que l'on reste dans un domaine simplement connexe où f est holomorphe $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz$ est indépendante du chemin suivi de A à B.

• Si f est holomorphe sur un domaine $\mathbb{D}$ simplement connexe, sauf en un de ses points A, et si C_1 et C_2 sont deux courbes fermées entourant A et incluses dans $\mathbb{D}$, on a

$$\int_{C_1^+} f(z)\,dz=\int_{C_2^+} f(z)\,dz \qquad (7)$$

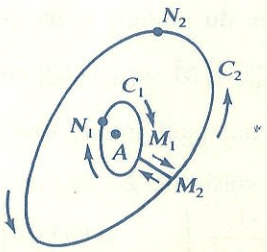


Figure 13.

En effet (fig. 13), on peut faire communiquer C_1 et C_2 par un **canal** de largeur nulle $M_1 M_2$, $\int_{\Gamma^+} f(z)\,dz$ est nulle, si Γ est la courbe fermée $M_1 M_2 N_2 M_2 M_1 N_1 M_1$ (sens des flèches), or en décomposant cette intégrale et tenant compte de $\int_{\overrightarrow{M_1 M_2}} f(z)\,dz + \int_{\overrightarrow{M_2 M_1}} f(z)\,dz = 0$, on obtient $\int_{C_2^+} f(z)\,dz + \int_{c_1^+} f(z)\,dz = 0$, d'où (7).

4. Primitives d'une fonction holomorphe

D'après ce qui précède, si a et b sont deux nombres complexes, éléments d'un domaine $\mathbb{D}$ simplement connexe où f est holomorphe, on peut donner un sens à l'intégrale $I = \int_a^b f(z)\,dz$, c'est la valeur commune de toutes les intégrales $\int_{\overrightarrow{AB}} f(z)\,dz$, $\overrightarrow{AB}$ étant un chemin quelconque joignant A, d'affixe a, à B, d'affixe b. On peut donc, a étant fixé, définir sur $\mathbb{D}$ la fonction

$$\varphi(z) = \int_a^z f(u)\,du.$$

Montrons que $\varphi(z)$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$. Considérons le rapport $\dfrac{\varphi(z)-\varphi(z_0)}{z-z_0} = g(z) = \dfrac{1}{z-z_0}\int_{\overrightarrow{M_0 M}} f(u)\,du$, l'arc $\overrightarrow{M_0 M}$ joignant, dans $\mathbb{D}$, $M_0(z_0)$ à $M(z)$. f étant holomorphe, elle est continue et on peut écrire $f(z) = f(z_0) + \alpha(u)$, avec $\lim_{u \to z_0} \alpha(u) = 0$.

Si nous prenons pour chemin $\overrightarrow{M_0 M}$ le vecteur $\overrightarrow{M_0 M}$, nous avons donc :

$$g(z) = \frac{1}{z-z_0}\left[\int_{\overrightarrow{M_0 M}} f(z_0)\,du + \int_{\overrightarrow{M_0 M}} \alpha(u)\,du\right], \text{ or } \int_{\overrightarrow{M_0 M}} du = z - z_0$$

donc

$$g(z) = f(z_0) + \frac{1}{z-z_0}\int_{\overrightarrow{M_0 M}} \alpha(u)\,du.$$

D'après la majoration du module d'une intégrale, on a :

$$\left|\int_{M_0 M} \alpha(u)\,du\right| \leqslant \|\overrightarrow{M_0 M}\| \sup|\alpha(u)| = |z - z_0| \sup|\alpha(u)|$$

Comme $\alpha(u) \xrightarrow[u \to z_0]{} 0$, on peut pour tout ε positif donné réaliser $|\alpha(u)| < \varepsilon$ pour z assez voisin de z_0, de sorte que

$$\left|\frac{1}{z-z_0}\int_{\overrightarrow{M_0 M}} \alpha(u)\,du\right| < \varepsilon$$

donc $$f(z_0)=\lim_{z\to z_0} g(z)$$

φ est dérivable en z_0 et $\varphi'(z_0)=f(z_0)$.

Ceci étant vrai pour tout z_0 de $\mathbb{D}$, $\varphi(z)=\int_a^z f(u)\,du$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et a pour dérivée $f(z)$. C'est, par définition, une primitive de $f(z)$. Une primitive de $f(z)$ peut se calculer, comme dans $\mathbb{R}$, par intégration par parties ou changement de variable; on peut aussi écrire

$$\varphi(z)=A(x,y)+iB(x,y) \qquad \varphi'(z)=f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$$

d'où $$\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{\partial B}{\partial y}=P \qquad -\frac{\partial A}{\partial y}=+\frac{\partial B}{\partial x}=Q$$

$$dA=P\,dx-Q\,dy \qquad dB=Q\,dx+P\,dy$$

Comme, d'après les conditions de Cauchy, ces deux formes différentielles sont intégrables, A et B se trouvent déterminées à des constantes réelles près, et φ à une constante complexe près.

5. Formule intégrale de Cauchy

f étant une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, simplement connexe, a étant un élément de $\mathbb{D}$, d'image A, nous allons chercher à évaluer l'intégrale $I=\int_{C^+}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$, C étant une courbe fermée de $\mathbb{D}$ entourant A.

• Envisageons d'abord le cas particulier où $f=1$ et où C est un cercle de centre A, de rayon R. En un point de ce cercle $z-a=Re^{i\theta}$. Donc

$$J=\int_{C^+}\frac{dz}{z-a}=\int_0^{2\pi}\frac{Rie^{i\theta}}{Re^{i\theta}}\,d\theta=i\int_0^{2\pi}d\theta=2i\pi$$

Ce résultat reste d'ailleurs valable, d'après le paragraphe 3, si l'on remplace le cercle C par une courbe fermée quelconque de $\mathbb{D}$, entourant A.

• Revenons au cas général où f et C sont quelconques. On peut trouver un cercle γ de centre A intérieur à C, et comme $\frac{f(z)}{z-a}$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$, sauf en A

$$I=\int_{C^+}\frac{f(z)}{z-a}\,dz=\int_{\gamma^+}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

ceci quel que soit le rayon r de γ, donc en particulier

$$I=\lim_{r\to 0^+}\int_{\gamma^+}\frac{f(z)}{z-a}\,dz. \qquad (8)$$

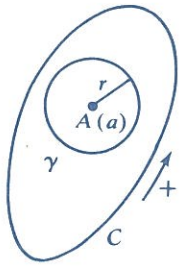


Figure 14.

Mais $$\int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_{\gamma^+} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz + \int_{\gamma^+} \frac{f(a)}{z-a}\,dz$$
$$= \int_{\gamma^+} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz + 2\,i\pi f(a)$$

Comme f est holomorphe, donc dérivable en a,

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = f'(a) + g(z) \text{ avec } |g(z)| < \varepsilon \text{ donné pour } |z-a| < \alpha$$

Donc $$\int_{\gamma^+} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = f'(a)\int_{\gamma^+} dz + \int_{\gamma^+} g(z)\,dz$$

La première de ces intégrales est nulle d'après le théorème de Cauchy, le module de la seconde est majoré par $\varepsilon \cdot 2\,\pi r$, donc tend vers zéro. Il en résulte $I = 2\,i\pi f(a)$.

C'est le résultat le plus fondamental, par ses nombreuses conséquences, de la théorie de l'intégration sur $\mathbb{C}$. Nous l'énoncerons ainsi :

Si f est une fonction holomorphe sur le domaine $\mathbb{D}$, simplement connexe, si a, d'image A est un élément de $\mathbb{D}$, et C une courbe fermée de $\mathbb{D}$, entourant A, on a :

$$f(a) = \frac{1}{2\,i\pi}\int_{C^+} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

C'est la **formule intégrale de Cauchy.**

Elle exprime que la connaissance d'une fonction holomorphe f sur une courbe fermée C permet de connaître ses valeurs en tous les points intérieurs à C. Comme d'autre part la connaissance de $P(x, y)$, partie réelle de f, entraîne celle à une constante près de sa partie imaginaire $Q(x, y)$, on voit qu'une fonction harmonique est connue sur l'intérieur d'une courbe C, dès que l'on connaît ses valeurs sur C. Ce résultat sera généralisé dans le chapitre consacré aux équations aux dérivées partielles.

6. Série de Taylor d'une fonction holomorphe

• Soit encore f holomorphe sur un domaine $\mathbb{D}$, soit A un point d'affixe a, appartenant à $\mathbb{D}$; C un cercle de centre A, de rayon R, inclus

dans $\mathbb{D}$; M un point d'affixe z, intérieur à C, c'est-à-dire tel que $|z-a|<R$; P, d'affixe u, un point variable de C, de sorte que $|u-a|=R$.

On a $$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C^+}\frac{f(u)}{u-z}\,du$$

et $$\frac{1}{u-z}=\frac{1}{u-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{u-a}}$$

que l'on peut développer en série entière par rapport à $\dfrac{z-a}{u-a}$, dont le module est inférieur à 1 :

$$\frac{1}{u-z}=\frac{1}{u-a}\cdot\sum_{0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{u-a}\right)^n$$

Il s'ensuit que $$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C^+}f(u)\cdot\left[\sum_{0}^{+\infty}\frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}\right]du$$

Cette série est normalement convergente, donc si l'on admet l'extension à $\mathbb{C}$ de l'intégration terme à terme d'une telle série, on obtient

$$f(z)=\frac{1}{2i\pi}\sum_{0}^{+\infty}(z-a)^n\cdot\int_{C^+}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,du=\sum_{0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$$

avec $$c_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{C^+}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,du$$

D'où le théorème :

> Toute fonction holomorphe sur un domaine $\mathbb{D}$ est développable en série entière par rapport à la variable $z-a$ sur tout disque ouvert de centre $A(a)$, inclus dans $\mathbb{D}$.

Il en résulte que toute fonction holomorphe est analytique sur un tel disque.

- Comme par ailleurs $f(z)=\sum_{0}^{+\infty}c_n(z-a)^n$ est holomorphe, on a

$$f'(z)=\sum_{1}^{+\infty}nc_n(z-a)^{n-1}$$ elle-même holomorphe,

donc $$f''(z)=\sum_{2}^{+\infty} n(n-1)\,c_n\,(z-a)^{n-2}$$

et de même $$f^{(p)}(z)=\sum_{p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!}\,c_n\,(z-a)^{n-p}$$

En donnant à z la valeur a dans chacune de ces relations, on voit que

$$c_0=f(a),\ c_1=f'(a),\ \ldots,\ c_p=\frac{1}{p!}\,f^{(p)}(a),\ \ldots$$

la série s'écrit encore

$$f(z)=\sum_{0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{n!}\,f^{(n)}(a)$$

C'est la série de Taylor de $f(z)$ sur un disque de centre a.

En comparant les deux formes de c_n, on obtient encore

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\,i\pi}\int_{C^+} \frac{f(u)\,du}{(u-a)^{n+1}}$$

Ceci justifie la dérivation sous le signe $\int$, par rapport à a, dans la formule intégrale de Cauchy.

D. THÉORIE DES RÉSIDUS

1. Pôles d'une fonction. Fonction méromorphe

• Nous avons vu que tout zéro (ou racine) d'une fonction holomorphe, non identique à 0, est isolé. Si a est un zéro de f, holomorphe sur $\mathbb{D}$, le développement de Taylor de f a pour terme constant $c_0=f(a)=0$ donc s'écrit

$$f(z)=\sum_{1}^{+\infty} c_n\,(z-a)^n=(z-a)\sum_{1}^{+\infty} c_n\,(z-a)^{n-1}$$

Si $c_1=f'(a)\neq 0$, $f(z)=(z-a)\,\varphi(z)$ avec $\varphi(z)$ holomorphe et $\varphi(a)\neq 0$. On dit alors que a est un zéro d'ordre 1 (ou **simple**) de f.

Si $c_1=f'(a)=0$, $c_2=\frac{1}{2}\,f''(a)\neq 0$, $f(z)=(z-a)^2\,\varphi(z)$ avec $\varphi(z)$ holomorphe et $\varphi(a)\neq 0$. a est alors un pôle double.

D'une façon générale, sauf si f est la fonction nulle (auquel cas $c_n = 0$ pour tout n), il existe un entier p et un seul tel que $c_n = 0$, $\forall n \leqslant p-1$, et $c_p \neq 0$. Alors

$$f(z) = \sum_{p}^{+\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^p \varphi(z) \tag{9}$$

φ étant holomorphe et $\varphi(a) \neq 0$.

On dit alors que a est un zéro d'ordre p de f.

Remarquons que (9) définit un entier p unique, même si a n'est pas un zéro de f (alors $p=0$ et $\varphi = f$).

• Nous dirons que a est un pôle d'ordre p, entier positif, d'une fonction f, s'il existe un domaine $\mathbb{D}$ contenant a sur lequel f peut s'écrire $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^p}$, φ étant holomorphe sur $\mathbb{D}$, et $\varphi(a) \neq 0$. Souvent φ est elle-même le quotient de deux fonctions holomorphes, $f(z)$ s'écrit $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, P et Q étant holomorphes sur $\mathbb{D}$, et Q ne s'annulant que pour $z = a$, zéro d'ordre p.

• Une fonction f, holomorphe sur un domaine $\mathbb{D}$ à l'exclusion d'un certain nombre de points de $\mathbb{D}$ qui sont des pôles de f, est dite méromorphe sur $\mathbb{D}$. C'est le cas en particulier d'une fraction rationnelle : elle est méromorphe sur $\mathbb{C}$, ses pôles sont les zéros du dénominateur, ils sont en nombre fini. Mais, par exemple, la fonction $f(z) = \dfrac{z+1}{e^{2z}-1}$, méromorphe sur $\mathbb{C}$, admet une infinité de pôles $z_k = ik\pi$, k entier relatif.

2. Partie principale et résidu d'une fonction méromorphe en un pôle

Revenons à la notation $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^p}$, φ holomorphe sur $\mathbb{D}$ contenant a, $\varphi(a) \neq 0$. φ est analytique sur un disque ouvert de centre $A(a)$, et s'écrit

$$\varphi(z) = \sum_{0}^{+\infty} C_n (z-a)^n$$

On a donc

$$f(z) = \frac{C_0}{(z-a)^p} + \frac{C_1}{(z-a)^{p-1}} + \ldots + \frac{C_{p-1}}{z-a} + \sum_{p}^{+\infty} C_n (z-a)^{n=p}$$

$\sum_{p}^{+\infty} C_n (z-a)^{n-p}$ est une fonction holomorphe $g(z)$, donc

$$f(z)=g(z)+P\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

où g est holomorphe et P est un polynôme de la variable $\frac{1}{z-a}$.

Par définition

$$P\left(\frac{1}{z-a}\right)=\frac{C_0}{(z-a)^p}+\frac{C_1}{(z-a)^{p-1}}+\ldots+\frac{C_{p-1}}{z-a} \quad \text{où} \quad C_0 \neq 0$$

est la partie principale de f relative au pôle a.

Dans cette partie principale, le coefficient C_{p-1} de $\frac{1}{z-a}$ s'appelle le résidu de f relatif au pôle a, ou plus simplement résidu en a. Son importance apparaîtra dans les deux paragraphes suivants.

Pour calculer ce résidu, que nous noterons par exemple $\mathrm{Res}(f)_a$, ou R_a, il suffit de connaître le coefficient C_{p-1} dans la série de Taylor de la fonction $(z-a)^p f(z)$ suivant la variable $z-a$. Cependant, pour $p=1$ et $p=2$, on peut donner des formules simples :

— pour $p=1$ (pôle simple), $R_a=\lim_{z \to a} (z-a) f(z)$

lorsque $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, P et Q holomorphes, $(z-a) f(z)=\frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(a)}{z-a}}$

puisque $Q(a)=0$, donc $\boxed{R_a=\frac{P(a)}{Q'(a)}}$

formule d'usage courant;

— pour $p=2$ (pôle double), $R_a=C_1$, avec

$$f(z)=\frac{C_0}{(z-a)^2}+\frac{C_1}{z-a}+g(z)$$

on vérifie facilement que $R_a=[(z-a)^2 f(z)]'_{z=a}$.

Notons encore qu'une fraction rationnelle est la somme d'une partie entière et de ses parties principales relatives à ses divers pôles, on retrouve la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$. Le calcul de ses résidus nécessite la factorisation sur $\mathbb{C}$ de son dénominateur.

3. Forme intégrale du résidu d'une fonction méromorphe

Soit f méromorphe sur $\mathbb{D}$ et n'admettant sur $\mathbb{D}$ qu'un pôle a, d'ordre p. Avec les notations qui précèdent, C étant une courbe fermée de $\mathbb{D}$, entourant le point $A(a)$, calculons

$$I=\int_{C^+} f(z)\,dz = C_0 \int_{C^+} \frac{dz}{(z-a)^p} + \ldots + C_{p-2} \int_{C^+} \frac{dz}{(z-a)^2} + C_{p-1} \int_{C^+} \frac{dz}{z-a} + \int_{C^+} g(z)\,dz$$

g étant holomorphe sur C et à l'intérieur,

$$\int_{C^+} g(z)\,dz = 0$$

D'autre part on sait que $\displaystyle\int_{C^+} \frac{dz}{z-a} = 2i\pi$

Calculons $\displaystyle J_k = \int_{C^+} \frac{dz}{(z-a)^k}$ k entier $\geqslant 2$.

Cette intégrale sur C^+ a même valeur que sur un cercle γ de centre A, de rayon r, intérieur à C, or sur un cercle $z = a + re^{i\theta}$ et

$$J_k = \int_{\gamma^+} \frac{dz}{(z-a)^k} = \int_0^{2\pi} r^{-k} e^{-ik\theta} \cdot rie^{i\theta}\,d\theta$$

$$= ir^{1-k} \int^{2\pi} e^{i(1-k)\theta}\,d\theta = \frac{r^{1-k}}{1-k}\left[e^{i(1-k)2\pi} - 1\right] = 0,$$

$1-k$ étant entier.

On voit que I se réduit à $C_{p-1} \cdot 2i\pi = 2i\pi R_a$, R_a étant le résidu de f en a.

D'où la formule

$$\boxed{R_a = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} f(z)\,dz}$$

4. Théorème des résidus pour une fonction méromorphe

La relation qui précède, sous la forme $\displaystyle\int_{C^+} f(z)\,dz = 2i\pi R_a$, permet de calculer l'intégrale de f sur un contour fermé C entourant le seul pôle a de f, si on connaît le résidu de f en a.

Plus généralement f étant une fonction méromorphe sur un domaine $\mathbb{D}$, C une courbe fermée de $\mathbb{D}$ ne passant par aucun pôle de f, et entourant n pôles de f, soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$, de résidus $R_1, R_2, \ldots, R_n$, l'intégrale

$I=\int_{C^+} f(z)\,dz$ est la somme des intégrales de f sur les courbes fermées $C_1, C_2, \ldots, C_n$ entourant respectivement $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et construites de telle sorte que C_1 ait un arc commun avec C et un arc commun avec C_2, C_2 deux arcs communs avec C, un avec C_1 et un avec C_3, et ainsi de suite (fig. 15 où $n=4$). On a donc aussitôt $I=2i\pi\sum_1^n R_k$.

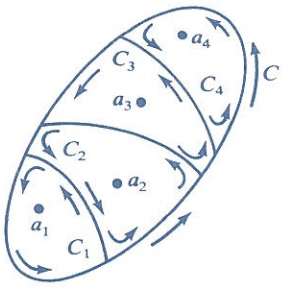


Figure 15.

C'est le théorème des résidus, que nous énoncerons ainsi :

• Si f est une fonction méromorphe sur le domaine $\mathbb{D}$, C une courbe fermée de $\mathbb{D}$ ne passant par aucun pôle de f et entourant n pôles de f, où ses résidus sont $R_1, R_2, \ldots, R_n$, on a

$$\int_{C^+} f(z)\,dz=2i\pi\sum_{k=1}^{k=n} R_k$$

• On peut compléter cet énoncé en remarquant que si C n'entoure aucun pôle de f, son intégrale sur C est nulle d'après le théorème de Cauchy, qui est donc le cas où $n=0$ dans la formule des résidus. Voyons ce que devient l'intégrale lorsque C passe par un pôle a de f; P et Q étant deux points quelconques de C, de part et d'autre de $A(a)$, $\int_{\overset{\frown}{PQ}^+} f(z)\,dz$ est définie (en supposant évidemment que le seul pôle de f situé sur C est a). Si l'arc $\overset{\frown}{PQ}$ est suffisamment petit, et si C admet une tangente en A, on peut assimiler l'arc $\overset{\frown}{PQ}$ à cette tangente et le paramétrer par $z=a+\lambda t$, λ étant un complexe et t un paramètre réel; en écrivant $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^p}$, avec φ holomorphe, $\varphi(a)\neq 0$ et p entier $\geqslant 1$, on a, pour z voisin de a, $f(z)\sim\dfrac{\varphi(a)}{\lambda^p}\cdot\dfrac{1}{t^p}$, or $\int_\alpha^\beta \dfrac{dt}{t^p}$ n'a pas de sens si $\alpha<0<\beta$, il en est de même

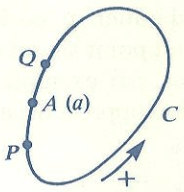


Figure 16.

de l'intégrale $\int_{\widehat{OP}_+} f(z)\,dz$; ainsi $\int_{C^+} f(z)\,dz$ n'est pas définie si C passe par un pôle de f.

Exemple.

Calculer $J(a)=\int_{C^+} \frac{z\,dz}{(z^2-1)(e^z+1)}$ C étant le cercle de centre 0, de rayon a.

$f(z)=\frac{z}{(z^2-1)(e^z+1)}$ admet les pôles simples $1, -1, \pm(i\pi+2ik\pi)$, k entier $\geqslant 0$, dont les modules sont 1 et $(2k+1)\pi$.

D'après ce qui précède, $J(a)$ n'a de sens que si $a \neq 1$ et $\neq (2k+1)\pi$.

Si $a<1$, $J(a)=0$.

Si $1<a<\pi$, $J(a)=2i\pi(R_1+R_{-1})$.

Calculons les résidus en $z=\pm 1$: les pôles de $f=\frac{P}{Q}$ étant simples, le résidu en un quelconque des pôles est la valeur en ce point de

$$\frac{P(z)}{Q'(z)}=\frac{z}{2z(e^z+1)+(z^2-1)e^z}$$

donc $R_1=\frac{1}{2(e+1)}$, $R_{-1}=\frac{1}{2(e^{-1}+1)}$ et $J(a)=i\pi\left(\frac{1}{e+1}+\frac{e}{e+1}\right)=i\pi$

Si $\pi<a<3\pi$, $J(a)=2i\pi(R_1+R_{-1}+R_{i\pi}+R_{-i\pi})$

$$R_{i\pi}=\frac{P(i\pi)}{Q'(i\pi)}=\frac{i\pi}{(-\pi^2-1)e^{i\pi}}=\frac{i\pi}{\pi^2+1},\quad R_{-i\pi}=\frac{-i\pi}{\pi^2+1}$$

donc ici encore $J(a)=i\pi$.

De même les résidus en $i\pi+2ik\pi$ et $-i\pi-i2k\pi$ seront opposés, il en résulte que pour tout a supérieur à 1 et $\neq \pi+2k\pi$, $J(a)=i\pi$.

5. Point singulier essentiel. Série de Laurent

• Si f est une fonction holomorphe sur un domaine $\mathbb{D}$ privé d'un point a, et non définie en a, a est un point singulier de f. Si a n'est pas un pôle,

c'est-à-dire s'il n'existe pas d'entier p positif tel que $(z-a)^p f(z)$ soit holomorphe, on dit que a est un point singulier essentiel, ou simplement un **point essentiel** de f. C'est le cas, par exemple, de $z=0$ pour la fonction $e^{\frac{1}{z}}$. Cette fonction admet un développement en série entière, pour $z \neq 0$, suivant la variable $\frac{1}{z}$: $e^{\frac{1}{z}} = \sum_0^{+\infty} \frac{1}{n!\, z^n}$.

La fonction $e^{z+\frac{1}{z}} = e^z\, e^{\frac{1}{z}} = \left(\sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_0^{+\infty} \frac{1}{n!\, z^n}\right)$, dans laquelle on peut effectuer le produit de ces deux séries absolument convergentes, peut être représentée pour $z \neq 0$ par une série de la forme $\sum_0^{+\infty} C_n\, z^n$, une telle série s'appelle une série de Laurent. La forme complexe d'une série de Fourier, par le changement de variable $e^{i\theta} = z$, devient une série de Laurent où $|z| = 1$.

• Considérons une fonction f holomorphe sur le domaine $\mathbb{D}$ défini par $R < |z-a| < R'$, qui est une couronne circulaire, limitée par les deux cercles Γ et Γ'. On ne peut pas appliquer, en général, la formule intégrale de Cauchy en a, car on ne sait rien de f à l'intérieur de Γ, mais cette formule s'applique en un point z de $\mathbb{D}$, si l'on fait communiquer Γ et Γ' par un canal (fig. 17). On a donc

$$f(z) = g(z) - h(z)$$

avec
$$g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma'+} \frac{f(u)}{u-z}\, du$$

et
$$h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma+} \frac{f(u)}{u-z}\, du$$

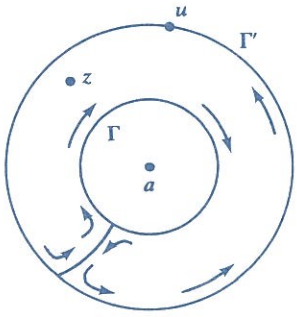


Figure 17.

Sur Γ' on a $\left|\frac{z-a}{u-a}\right|<1$ et en écrivant

$$\frac{1}{u-z}=\frac{1}{u-a-(z-a)}=\frac{1}{(u-a)\left(1-\frac{z-a}{u-a}\right)}=\frac{1}{u-a}\sum_{0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{u-a}\right)^n$$

on obtient

$$g(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'+}\left(\sum_{0}^{+\infty}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}(z-a)^n\right)\mathrm{d}u=\sum_{0}^{+\infty}C_n(z-a)^n$$

en posant $C_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'+}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}u$.

Sur Γ on a $\left|\frac{z-a}{u-a}\right|>1$, nous écrirons

$$\frac{1}{u-z}=-\frac{1}{(z-a)\left(1-\frac{u-a}{z-a}\right)}=-\frac{1}{z-a}\sum_{0}^{+\infty}\left(\frac{u-a}{z-a}\right)^n$$

d'où

$$h(z)=-\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'+}\left[\sum_{0}^{+\infty}(u-a)^n f(u)\cdot\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\right]\mathrm{d}u=$$

$$-\sum_{0}^{+\infty}\frac{\gamma_{n+1}}{(z-a)^{n+1}}$$

en posant $\gamma_{n+1}=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'+}f(u)\cdot(u-a)^n\,\mathrm{d}u$.

On a donc

$$f(z)=\sum_{0}^{+\infty}C_n(z-a)^n+\sum_{1}^{+\infty}\frac{\gamma_n}{(z-a)^n},$$

et si nous posons $\gamma_n=C_{-n}$, $f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}C_n(z-a)^n$.

En remarquant enfin que, f étant holomorphe sur $\mathbb{D}$, les coefficients C_n et γ_n peuvent être calculés par intégration sur un même cercle C de

rayon compris entre R et R', on vérifiera facilement que, pour tout n entier relatif

$$C_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} \, du$$

La série de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n$ converge absolument sur $\mathbb{D}$ et a pour somme $f(z)$. La relation

$$\boxed{f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n}$$

constitue le développement de $f(z)$ en série de Laurent suivant $z-a$.

Remarques.

— Le cas d'une fonction méromorphe sur le disque $|z-a|<R'$ et n'admettant que a pour pôle sur ce disque correspond au cas particulier $f(z) = \sum_{-p}^{+\infty} C_n (z-a)^n$, donc $C_n = 0$ pour $n \leqslant -p-1$.

— Il peut arriver qu'une série de Laurent ne converge que pour $|z| = R$, c'est le cas limite $R' = R$ et nous admettrons qu'alors la couronne circulaire se réduit au cercle Γ, il en est ainsi par exemple de

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2+1}$$

absolument convergente pour $|z| = 1$, divergente pour $|z| \neq 1$.

6. Généralisation du théorème des résidus

Si nous supposons f holomorphe sur le domaine $\mathbb{D}$ privé du point a, qui est un point singulier, pôle ou point essentiel, on a sur un disque de centre a $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n$ avec $C_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} f(u)$ d'après la valeur de C_n obtenue plus haut, C étant un cercle de centre $A(a)$ du disque.

On a donc

$$\int_{C^+} f(u) \, du = 2i\pi C_{-1}$$

C_{-1}, coefficient de $\dfrac{1}{z-a}$ dans la série de Laurent de $f(z)$, est ici encore le résidu de f en a, et C peut être remplacé par une courbe fermée quelconque entourant a dans le disque défini ci-dessus. On en déduit, par un raisonnement analogue à celui du paragraphe 4, le théorème des résidus.

Soit f une fonction holomorphe sur le domaine $\mathbb{D}$, sauf en un nombre fini de points singuliers, pôles ou points essentiels, et Γ une courbe fermée tracée dans $\mathbb{D}$ et ne passant par aucun point singulier; l'intégrale $\displaystyle\int_{\Gamma^+} f(z)\,dz$ est égale au produit par $2i\pi$ de la somme des résidus de f en ses points singuliers intérieurs à Γ.

E. APPLICATION DE L'INTÉGRATION DANS LE CHAMP COMPLEXE AU CALCUL DE CERTAINES INTÉGRALES RÉELLES

1. Calcul de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$, φ étant rationnelle

• En posant $e^{i\theta} = z$, cette intégrale se ramène à la forme $\displaystyle\int_{C^+} f(z)\,dz$, où C est le cercle trigonométrique et f une fonction rationnelle. Elle n'a de sens que si f n'a pas de pôle sur C, donc si φ est continue sur $[0, 2\pi]$.

Exemple.

Calcul de $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \quad ie^{i\theta}\,d\theta = dz, \quad \text{donc} \quad d\theta = -i\frac{dz}{z}$$

et
$$I = -\frac{i}{2}\int_{C^+} \frac{(z^2+1)^2}{z^2(z^2+4z+1)}\,dz = -\frac{i}{2}J$$

Les pôles de la fonction à intégrer sont $z_1 = 0$, pôle double; $z_2 = \sqrt{3}-2$, pôle simple; $z_3 = -\sqrt{3}-2$, pôle simple. Seuls z_1 et z_2 sont intérieurs à C, donc si R_1 et R_2 sont les résidus correspondants, $J = 2i\pi(R_1+R_2)$, $I = \pi(R_1+R_2)$

$g(z) = \dfrac{(z^2+1)^2}{z^2(z^2+4z+1)^2}$ étant de la forme $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$

$$R_2 = \frac{P(z_2)}{Q'(z_2)} = \left[\frac{(z^2+1)^2}{2z(z^2+4z+1)+z^2(2z+4)}\right]_{z=\sqrt{3-2}}$$

(pôle simple)

dont le calcul est simplifié par $z^2+1=-4z$ d'où $R_2=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

En $z_1=0$, pôle double, nous appliquons $R_1=(z^2\,g(z))'_{z=0}$, ce qui donne $R_1=-4$.

On en déduit $$I=\frac{4\pi}{3}(2\sqrt{3}-3)$$

• Remarquons que cette méthode s'applique aussi au cas où $\varphi(\cos\theta, \sin\theta)$, sans être rationnelle, s'exprime par une fonction de $z=e^{i\theta}$ n'admettant pas de pôle sur C et n'admettant à l'intérieur de C que des pôles ou points essentiels.

2. Lemmes de Jordan

Les deux **lemmes** (théorèmes préliminaires) de Jordan permettent, par des passages à la limite sur des chemins d'intégration adaptés, de calculer un grand nombre d'intégrales.

• Soit C un arc de cercle de centre O, de rayon R, d'angle au centre α; soit f une fonction définie sur un domaine $|z|>r$, telle que $\lim\limits_{|z|\to\infty} zf(z)=0$. Cherchons la limite de $I=\int_C f(z)\,dz$ quand $R\longrightarrow+\infty$.

On a $$|I|\leqslant R\alpha \sup|f(z)|=\alpha\sup|zf(z)|$$

donc $|I|<\varepsilon$ donné pour $|z|>A(\varepsilon)$.

D'où le premier lemme de Jordan :

> Si $\lim\limits_{|z|\to\infty} zf(z)=0$, $\lim\limits_{R\to\infty}\int_C f(z)\,dz=0$, C étant un arc de cercle de centre O, de rayon R.

• On démontre de même le second lemme de Jordan.

> Si $\lim\limits_{|z|\to 0} zf(z)=0$, $\lim\limits_{R\to 0}\int_C f(z)\,dz=0$, C étant un arc de cercle de centre O, de rayon R.

3. Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^\alpha}$, $\alpha>1$

$\alpha>1$ est évidemment la condition d'existence de cette intégrale $I(\alpha)$.

• Considérons d'abord le cas où α est rationnel, donc $\alpha=\frac{p}{q}$, p et q entiers positifs et $p>q$. Dans $I(\alpha)$ posons $x=t^q$, il vient

$$I=\int_0^{+\infty} \frac{qt^{q-1}\,dt}{1+t^p}=q\int_0^{+\infty} \frac{t^{q-1}}{1+t^p}\,dt$$

Soit $f(z)=\frac{z^{q-1}}{1+z^p}$. Cette fonction est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et admet les p pôles définis par $z^p=-1=e^{i\pi+2ik\pi}$, soit $z_k=e^{i\frac{\pi}{p}+2i\frac{k\pi}{p}}$, $k=0, 1, 2, \ldots, p-1$.

Isolons le pôle $z_0=e^{i\frac{\pi}{p}}$, comme indiqué sur la figure 18 par le contour fermé $OABO$ constitué du vecteur $\overrightarrow{OA}$, A étant le point d'affixe $R>1$, de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ du cercle (O, R), B étant le point d'affixe $Re^{2i\frac{\pi}{p}}$, et du vecteur $\overrightarrow{BO}$.

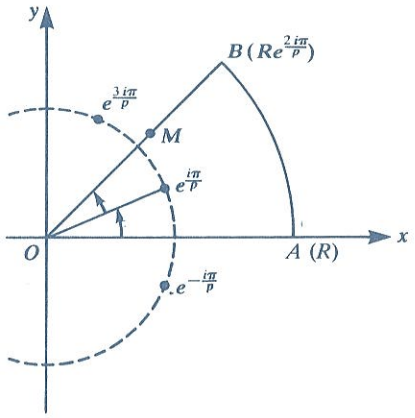


Figure 18.

Considérons l'intégrale $J=\int_{C^+} f(z)\,dz$, C étant ce contour.

Comme $e^{i\frac{\pi}{p}}$ est le seul pôle de f intérieur à C, le théorème des résidus permet d'écrire $J=2i\pi\cdot R_0$, R_0 étant le résidu de f en z_0.

Or, z_0 étant un pôle simple

$$R_0=\frac{z_0^{q-1}}{pz_0^{p-1}}=\frac{1}{p}\,z_0^{q-p}=\frac{1}{p}\,e^{i\pi\frac{q}{p}-1}=-\frac{1}{p}\,e^{i\frac{\pi}{\alpha}}$$

donc

$$J=-\frac{2i\pi}{p}\,e^{i\frac{\pi}{\alpha}}$$

D'autre part

$$J=\int_{\overrightarrow{OA}} f(z)\,dz+\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz+\int_{\overrightarrow{BO}} f(z)\,dz=J_1+J_2+J_3$$

$$J_1 = \int_0^R f(z)\,dz, \quad z \text{ étant réel}$$

$$J_3 = \int_R^0 f(\rho e^{i\frac{2\pi}{p}}) \cdot e^{i\frac{2\pi}{p}}\,d\rho, \text{ l'affixe de } M \text{ décrivant } \overrightarrow{BO} \text{ étant } \rho e^{2i\frac{\pi}{p}}$$

donc

$$J_3 = -e^{2i\frac{\pi}{p}} \int_0^R \frac{\rho^{q-1'} \cdot e^{2i\pi\frac{q-1}{p}}}{1+\rho^p\, e^{2i\pi}}\,d\rho$$

$$= -e^{2i\pi\frac{q}{p}} \int_0^R \frac{\rho^{q-1}\,d\rho}{1+\rho^p} = -e^{\frac{2i\pi}{\alpha}} J_1$$

Considérons $\lim_{R\to\infty} J = \lim J_1 + \lim J_2 + \lim J_3$.

On a

$$\lim J_1 = \int_0^{+\infty} f(z)\,dz$$

$$\lim J_3 = -e^{2i\frac{\pi}{\alpha}} \int_0^{+\infty} f(z)\,dz$$

Quant à $\lim J_2$, elle est nulle d'après le premier lemme de Jordan car $zf(z) = \dfrac{z^q}{1+z^p} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$ $(p > q)$. Comme J ne dépend pas de R, on a donc

$$-\frac{2i\pi}{p} e^{i\frac{\pi}{\alpha}} = (1 - e^{2i\frac{\pi}{\alpha}}) \int_0^{+\infty} f(z)\,dz$$

$$= (1 - e^{2i\frac{\pi}{\alpha}}) \cdot \frac{I}{q}$$

Il en résulte

$$I = \frac{\pi}{\alpha \sin\dfrac{\pi}{\alpha}}$$

• Si α n'est pas rationnel, on peut la considérer comme limite commune de deux suites adjacentes (u_n) et (v_n), où u_n et v_n sont les valeurs approchées de α par défaut et par excès à 10^{-n} près; on aura, $I(\alpha)$ étant une fonction décroissante de α, $I(u_n) > I(\alpha) > I(v_n)$, et

$$I(u_n) - I(v_n) = \frac{\pi}{u_n \sin\dfrac{\pi}{u_n}} - \frac{\pi}{v_n \sin\dfrac{\pi}{v_n}}$$

peut être rendue inférieure à ε pour $v_n - u_n$ suffisamment petit, puisque $\alpha \sin\dfrac{\pi}{\alpha}$ est une fonction continue.

Or $v_n - u_n = 10^{-n}$ et $I(u_n) - I(v_n) < \varepsilon \Longrightarrow I(u_n) - I(\alpha) < \varepsilon$

donc $$\lim_{n\to\infty} I(u_n)=I(\alpha)=\frac{\pi}{\alpha \sin\frac{\pi}{\alpha}}$$

Il en résulte pour tout α supérieur à 1 la formule

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^\alpha}=\frac{\pi}{\alpha \sin\frac{\pi}{\alpha}}}$$

Cette formule a été utilisée dans le chapitre précédent pour établir la formule des compléments.

4. Calcul d'intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, P et Q étant des polynômes

Une telle intégrale n'a évidemment de sens que si $d^0 P - d^0 Q \leqslant -2$, et si Q n'a pas de zéro réel, ce que nous supposerons.

Les pôles de $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, c'est-à-dire les zéros de Q, polynôme à coefficients réels, sont deux à deux conjugués, Q est d'ailleurs nécessairement de degré pair, soit $2n$. Appelons $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ceux de ces zéros dont les parties imaginaires sont positives, et appelons C un contour fermé constitué du vecteur $\overrightarrow{AB}$ de l'axe réel, A et B ayant pour affixes $-R$ et $+R$, et du demi-cercle $\overset{\frown}{BA}$ de centre 0, de rayon R, R étant supérieur au plus grand des modules des z_k. Considérons l'intégrale

$$J(R)=\int_{C^+} f(z)\,dz=\int_{\overrightarrow{BA}} f(z)\,dz+\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz$$

et sa limite pour $R \longrightarrow \infty$ (fig. 19).

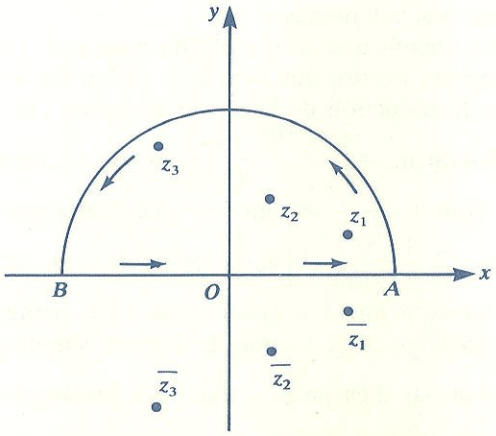


Figure 19.

La seconde des intégrales ci-dessus tend vers 0 d'après le premier lemme de Jordan, car $zf(z) \underset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 0$. La première tend vers

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

Comme $J(R)=2i\pi\sum_{1}^{n} \text{Res}\,(f)_{z_k}$, on voit que c'est aussi la valeur de I, et nous retiendrons :

• Si P et Q sont deux polynômes à coefficients réels, tels que $d^0P-d^0Q\leqslant -2$, Q n'ayant pas de zéro réel, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ est égale au produit par $2i\pi$ de la somme des résidus de la fonction $\frac{P(z)}{Q(z)}$ en ses pôles de parties imaginaires positives.

Remarque.

Cette méthode est généralement beaucoup plus rapide que celle connue dans $\mathbb{R}$, consistant en décomposition en éléments simples et calcul de la primitive; cependant, comme cette dernière, elle nécessite la factorisation du dénominateur $Q(x)$, sauf cas particuliers.

5. Calcul d'intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,e^{ix}\,dx$

P et Q étant des polynômes.

On supposera encore que Q n'a pas de zéro réel. La convergence de cette intégrale dépend encore des degrés p et $2n$ de P et Q.

• Si $p\geqslant 2n$, la réduction de la partie imaginaire de l'intégrale à une série de terme général $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{P(x)}{Q(x)}\sin nx\,dx$, terme général qui ne tend pas vers 0 pour $n \longrightarrow \infty$, montre que l'intégrale diverge.

• Si $p\leqslant 2n-2$, $\left|\frac{P(x)}{Q(x)}\,e^{ix}\right|\leqslant\frac{k}{x^2}$ quand $x \longrightarrow \pm\infty$ et l'intégrale est absolument convergente. Le raisonnement du paragraphe précédent, fondé en partie sur le premier lemme de Jordan, s'applique, et l'intégrale est égale au produit par $2i\pi$ de la somme des résidus de $\frac{P(z)}{Q(z)}\,e^{iz}$ en ses pôles de parties imaginaires positives.

• Si $p=2n-1$, on démontrerait facilement à l'aide d'une série ou d'une intégration par parties que chacune des intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos x \, dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin x \, dx$ est semi-convergente, donc que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix}$ l'est aussi. Mais le premier lemme de Jordan ne s'applique plus car $z\frac{P(z)}{Q(z)}$ ne tend pas vers 0 quand $|z| \longrightarrow \infty$.

Reprenons cependant les hypothèses de la figure 19. Pour R assez grand $J(R)=\int_{C^+} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} \, dz$ est encore le produit par $2i\pi$ de la somme des résidus déjà définis, et

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{BA} f(z) \, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$$

Cherchons ce que devient l'intégrale

$$K(R)=\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z) \, dz = \int_0^{\pi} \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} \cdot e^{iRe^{i\theta}} \cdot iRe^{i\theta} \, d\theta$$

soit en posant $\frac{P}{Q}=\varphi$

$$K(R)=iR\int_0^{\pi} \varphi(Re^{i\theta}) \cdot e^{i(R\cos\theta+\theta)} \cdot e^{-R\sin\theta} \, d\theta = iR\int_0^{\pi} g(\theta) \, d\theta$$

Si α désigne un angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

$$K(R)=iR\left(\int_0^{\alpha} g(\theta) \, d\theta + \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} g(\theta) \, d\theta + \int_{\pi-\alpha}^{\pi} g(\theta) \, d\theta\right)$$
$$= iR(M_1+M_2+M_3)$$

On a $|M_1| \leqslant \alpha \sup |g(\theta)| \leqslant \alpha \sup |\varphi(z)| \leqslant \frac{\alpha k}{R}, \quad k>0$

puisque $\sin\theta \geqslant 0$, donc $e^{-R\sin\theta} \leqslant 1$, et $|z\varphi(z)| \leqslant k$
donc $R|M_1| \leqslant \alpha k$, de même $R|M_3| \leqslant \alpha k$.

On peut donc, ε étant donné positif, choisir α tel que $\alpha k < \frac{\varepsilon}{3}$; α étant ainsi fixé >0, $|M_2| < \pi \sup |g(\theta)|$, $\theta \in [\alpha, \pi-\alpha]$

donc $\qquad |M_2| < e^{-R\sin\alpha} \cdot \frac{k}{R}, \quad R|M_2| < ke^{-R\sin\alpha},$

on peut donc trouver R_0 tel que $R \geqslant R_0 \Longrightarrow R|M_2| < \frac{\varepsilon}{3}$ de sorte que

$|K(R)<\varepsilon$. Donc les résultats du cas $p-2n\leqslant -2$ restent valables, et nous conclurons :

• P et Q étant deux polynômes à coefficients réels, tels que $d^0 P<d^0 Q$ et que Q n'ait pas de zéro réel, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix}\,dx$ est égale au produit par $2i\pi$ de la somme des résidus de $\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}$ en ses pôles de parties imaginaires positives.

Exemple.

Calculons $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1}\,dx = I$.

Le seul pôle à retenir est $z=i$, le résidu en ce pôle simple est $\left[\frac{ze^{iz}}{2z}\right]_{z=i} = \frac{1}{2}e^{-1}$ on a donc $I=\frac{i\pi}{e}$

Il en résulte que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}\,dx = 0$, ce qui était prévisible, la fonction étant impaire, et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e}$.

• De telles intégrales s'appellent intégrales de Fourier, on les rencontre en effet à propos de la transformation de Fourier (chapitre suivant).

6. Autres intégrales classiques

Le lecteur développera facilement, suivant les méthodes indiquées, les deux calculs suivants.

• L'intégrale (dite de Dirichlet) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$: on part de $\int_{C^+} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$, C étant le contour représenté sur la figure 20, et on fait tendre R vers $+\infty$ et r vers 0, l'intégrale sur le demi-grand cercle tend vers 0, l'autre vers π, et on obtient

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}}$$

résultat déjà obtenu dans un exercice du chapitre précédent.

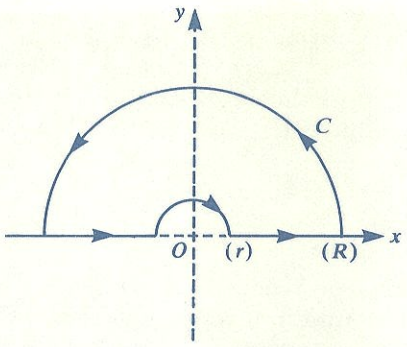


Figure 20.

- L'intégrale de Gauss

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}}$$

- Les intégrales (dites de Fresnel) $\int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$, qui s'obtiennent en intégrant e^{-z^2} sur le contour C (fig. 21) et en faisant tendre R vers $+\infty$. On obtient

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \cos x^2\,dx=\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}}$$

$\left(\text{on utilise } \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

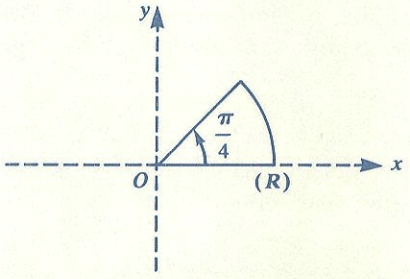


Figure 21.

Résumé du chapitre 2

• Une **fonction** $f(z)$ est **holomorphe** sur un domaine $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$ si elle est dérivable en tout point de $\mathbb{D}$, c'est-à-dire s'il existe

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

• La transformation ponctuelle définie par $z \longrightarrow Z=f(z)$, f étant holomorphe, est une **transformation conforme,** c'est-à-dire conservant l'angle orienté de deux courbes.

• Pour que $f(z)=P(x, y)+iQ(x, y)$, avec $z=x+iy$, soit dérivable au point (x, y) (ou monogène en ce point), il faut et il suffit que

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\partial P}{\partial y} \quad \textbf{(conditions de Cauchy)}$$

La dérivée est alors $f'(z)=\dfrac{\partial P}{\partial x}+i\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial x}-i\dfrac{\partial P}{\partial y}=\ldots$

• P et Q, parties réelle et imaginaire de $f(z)$ holomorphe sur $\mathbb{D}$, sont des **fonctions harmoniques conjuguées :** on a

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}=0$$

• **Différentielle de $f(z)$ holomorphe.**

$$\mathrm{d}f(z)=f'(z)\,\mathrm{d}z.$$

• **Fonctions holomorphes rationnelles.**

Voir cours détaillé, notamment **abaque de Smith, transformations homographiques, transformation de Joukovski.**

• Toute fonction définie par une série entière est holomorphe sur son disque ouvert de convergence, elle peut être dérivée terme à terme; ses dérivées successives sont aussi holomorphes sur le même disque; une telle **fonction** est dite **analytique.**

On définit ainsi $e^z=\sum_{0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}=e^x(\cos y+i\sin y)$, si $z=x+iy$

On en déduit

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},\quad \operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},\quad \operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},\quad \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\quad \operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}$$

• Le logarithme népérien de z (non nul) est défini par

$$Z=\ln z \iff \begin{cases} e^Z=z \\ \operatorname{Im} Z\in\,]-\pi,\,+\pi] \end{cases}$$

$\ln z$ est continue et holomorphe sur le plan complexe **coupé** suivant le demi-axe réel négatif, sa dérivée est $\frac{1}{z}$.

On a $\ln(re^{i\theta})=\ln r+i\theta$, si θ est choisi sur $]-\pi,\,+\pi]$

• L'intégrale $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz$ se ramène à deux intégrales curvilignes sur $\overset{\frown}{AB}$. Outre la plupart des propriétés déjà vues pour l'intégration dans $\mathbb{R}$, l'intégration dans $\mathbb{C}$ satisfait à la formule de majoration

$$\left|\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz\right|\leqslant \mu l,$$

où $\mu=\sup|f(z)|$ et $l=$longueur de $\overset{\frown}{AB}$.

• **Théorème de Cauchy.**

Si f est holomorphe sur $\mathbb{D}$ simplement connexe, et si C est une courbe de $\mathbb{D}$, on a

$$\int_{C^+} f(z)\,dz=0$$

• Si a et z sont deux éléments de $\mathbb{D}$, simplement connexe, où f est holomorphe, $\varphi(z)=\int_a^z f(u)\,du$ est une fonction holomorphe de z, primitive de $f(z)$.

• **Formule intégrale de Cauchy.**

Si f est holomorphe sur $\mathbb{D}$, simplement connexe, si a est un élément de $\mathbb{D}$ et C une courbe fermée de $\mathbb{D}$ entourant a, on a

$$f(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C^+}\frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

• Toute fonction holomorphe sur un domaine $\mathbb{D}$ est développable en série entière **(série de Taylor)** par rapport à la variable $z-a$ sur tout disque ouvert de centre $A(a)$ inclus dans $\mathbb{D}$, sous la forme

$$f(z)=\sum_{0}^{+\infty} C_n(z-a)^n, \text{ où } C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C^+}\frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\,du$$

C étant une courbe fermée de ce disque, entourant A. $f(z)$ est dite analytique sur un tel disque.

• **Fonction méromorphe.**

a est un pôle d'ordre p ($\in\mathbb{N}^*$) d'une fonction f, s'il existe un domaine $\mathbb{D}$ contenant a sur lequel f peut s'écrire $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-a)^p}$, φ holomorphe sur $\mathbb{D}$, $\varphi(a)\neq 0$

f est méromorphe sur $\mathbb{D}$ si elle est holomorphe sauf en des points de $\mathbb{D}$ qui sont des pôles de f. Une telle fonction peut s'écrire, sur un disque de centre $A(a)$

$$f(z)=\frac{C_0}{(z-a)^p}+\frac{C_1}{(z-a)^{p-1}}+\ldots+\frac{C_{p-1}}{z-a}+g(z)=P\left(\frac{1}{z-a}\right)+g(z)$$

g étant holomorphe.

• **Résidu d'une fonction méromorphe en un pôle.**

Dans ce qui précède, $P\left(\dfrac{1}{z-a}\right)$ est la partie principale de f relative au pôle a, et le coefficient C_{p-1} de $\dfrac{1}{z-a}$ s'appelle résidu de f au pôle a.

En un pôle simple a le résidu du quotient $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ de deux fonctions holomorphes est $R_a=\dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.

• **Théorème des résidus pour une fonction méromorphe.**

Si f est une fonction méromorphe sur $\mathbb{D}$, C une courbe fermée de $\mathbb{D}$ ne passant par aucun pôle de f et entourant n pôles de résidus R_1, R_2, ..., R_n, on a

$$\int_{C^+} f(z)\,dz=2i\pi\sum_{1}^{n} R_k$$

• **Point singulier essentiel.**

Un point singulier essentiel d'une fonction f est un point a, autre qu'un pôle, point isolé d'un domaine $\mathbb{D}$ tel que f est holomorphe sur le domaine $\mathbb{D}$, sauf en a où elle n'est pas définie.

• Il existe une **couronne circulaire** $R<|z-a|<R'$ sur laquelle une telle fonction f admet un développement de la forme

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n (z-a)^n$$

appelé **série de Laurent** de f relative à a, et dans laquelle

$$C_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}} \, du$$

• Le **théorème des résidus** s'étend à une fonction admettant sur un domaine $\mathbb{D}$, indifféremment, des pôles ou points singuliers essentiels.

• **Lemmes de Jordan.**

— Si $\lim_{|z| \to \infty} zf(z) = 0$, $\lim_{R \to \infty} \int_C f(z)\, dz = 0$, C étant un arc de cercle de centre O, de rayon R.

— Avec les mêmes notations,

si $\lim_{z \to 0} zf(z) = 0$, $\lim_{R \to 0} \int_C f(z)\, dz = 0$.

• Cas classiques de calcul d'**intégrales réelles** par la méthode des résidus.

$$\int_0^{2\pi} f(\cos x, \sin x)\, dx \text{ : on pose } e^{ix} = z$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha} = \frac{\pi}{\alpha \sin \frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{si } \alpha > 1.$$

Si P et Q sont des polynômes, Q n'ayant pas de zéro réel, et si :

$d^\circ P - d^\circ Q \leqslant -2$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$ est égale au produit par $2i\pi$ de la somme des résidus de $\frac{P(z)}{Q(z)}$ en ses pôles de parties imaginaires positives.

$d^\circ P - d^\circ Q \leqslant -1$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix}\, dx$ est égale au produit par $2i\pi$ de la somme des résidus de $\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}$ en ses pôles de parties imaginaires positives.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \quad \textbf{(intégrale de Dirichlet)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} \quad \textbf{(intégrale de Gauss)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2\, dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \quad \textbf{(intégrales de Fresnel)}$$

EXERCICES

■ **1.** *a*) Déterminer les fonctions $Q(x, y)$ de la forme $g(x) \cdot h(y)$ telles qu'il existe une fonction holomorphe $f(z)$ de partie imaginaire égale à Q (avec $z = x + iy$).

b) On donne $Q(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$, déterminer alors $f(z)$, en supposant en outre $f(0) = 1$. Donner une expression simple de $f(z)$.

---

a) Il faut et il suffit que Q vérifie $\Delta Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0$

soit $g''(x)\, h(y) + g(x)\, h''(y) = 0$,

ou $\frac{g''(x)}{g(x)} = -\frac{h''(y)}{h(y)} = \lambda$, constante car indépendante de y et de x.

Si $\lambda = 0$, $g(x) = ax + b$, $h(y) = cy + d$.

Si $\lambda > 0$, $\lambda = \omega^2$ donne $g'' - \omega^2 g = 0$, $h'' + \omega^2 y = 0$,

$$g(x) = ae^{\omega x} + be^{-\omega x},\ h(y) = c \sin \omega y + d \cos \omega y.$$

Si $\lambda < 0$, $\lambda = -\omega^2$ donne de même

$$g(x) = a \sin \omega x + b \cos \omega x, \qquad h(y) = ce^{\omega y} + de^{-\omega y}$$

Notons que les cas écartés $g(x) = 0$ et $h(y) = 0$ se trouvent inclus dans le cas $\lambda = 0$. Toutes les fonctions Q obtenues sont définies $\forall (x, y)$.

b) On vérifie que $Q(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$ est une fonction de l'une des formes précédentes. Cherchons la partie réelle $P(x, y)$ correspondante, elle satisfait à $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \sin x \operatorname{ch} y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -\cos x \operatorname{sh} y$, il en résulte

$P = -\cos x \operatorname{ch} y + C$, et la condition $f(0) = 1$, donc $P(0, 0) = 1$, $Q(0, 0) = 0$, donne $C = 0$.

La fonction cherchée est donc $f(z) = -\cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y$ ou encore $f(z) = -\cos x \cos iy + \sin x \sin iy = -\cos(x + ij) = -\cos z$.

■ **2.** Déterminer le domaine de convergence et la somme de chacune des séries entières $\sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \cos n\theta$ et $\sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \sin n\theta$, θ étant un réel donné, et z une variable complexe.

On a $\left|\frac{z^n}{n!} \cos n\theta\right| \leqslant \frac{|z|^n}{n!}$, terme général d'une série positive qui converge pour tout z, donc $f(z) = \sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \cos n\theta$ est définie sur $\mathbb{C}$, il en est de même de $g(z) = \sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \sin n\theta$. On a

$$f(z) + ig(z) = \sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!} e^{in\theta} = \sum_0^{+\infty} \frac{(ze^{i\theta})^n}{n!} = e^{ze^{i\tau}} = e^{iz \sin \theta}$$

$$f(z) - ig(z) = \sum_0^{+\infty} \frac{z^n}{n!} e^{-in\theta} = e^{ze^{-i\tau}} = e^{z \cos \theta} e^{-iz \sin \theta}$$

Par addition et soustraction on en déduit

$$f(z) = e^{z \cos \theta} \cos(z \sin \theta), \quad g(z) = e^{z \cos \theta} \sin(z \sin \theta)$$

Remarquons que pour z réel donné les séries ci-dessus constituent les développements en séries de Fourier des fonctions de θ obtenues alors.

■ **3.** Soit l'équation $z = \operatorname{tg} z$.

a) Démontrer qu'elle n'a que des racines réelles, et qu'il existe une et une seule racine x_n appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$, n étant entier relatif.

b) Soit $u_n = \frac{\pi}{2} + n\pi - x_n$, étudier la série de terme général u_n.

---

a) Il faut montrer que $\operatorname{tg} z = z$, avec $z = x + iy$, $y \neq 0$ (1) est impossible.

Supposons (1) vérifiée, on aurait aussi $\overline{\operatorname{tg} z} = \bar{z}$, or il est immédiat de constater $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$ et $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$

d'où $\operatorname{tg} \bar{z} = \bar{z}$, et $\operatorname{tg} z + \operatorname{tg} \bar{z} = z + \bar{z}$, $\operatorname{tg} z - \operatorname{tg} \bar{z} = z - \bar{z}$.

Or $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = \dfrac{\sin a}{\cos a} + \dfrac{\sin b}{\cos b} = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$, donc

$$(1) \Longrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos x \cos iy} = 2x, \qquad \frac{\sin 2iy}{\cos x \cos iy} = 2iy$$

soit

$$\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{\sin 2iy}{2iy} = \frac{i \operatorname{sh} 2y}{2iy} = \frac{\operatorname{sh} 2y}{2y}$$

relation de la forme

$$\frac{\sin X}{X} = \frac{\operatorname{sh} Y}{Y}. \qquad (2)$$

Or si $Y \neq 0$

$$\frac{\operatorname{sh} Y}{Y} = 1 + \frac{Y^2}{3!} + \frac{Y^4}{5!} + \ldots + \frac{Y^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots > 1$$

et on sait que

$$\frac{\sin X}{X} \leqslant 1.$$

La relation (2) est donc impossible, (1) aussi, et l'équation $z = \operatorname{tg} z$ ne peut avoir que des racines réelles.

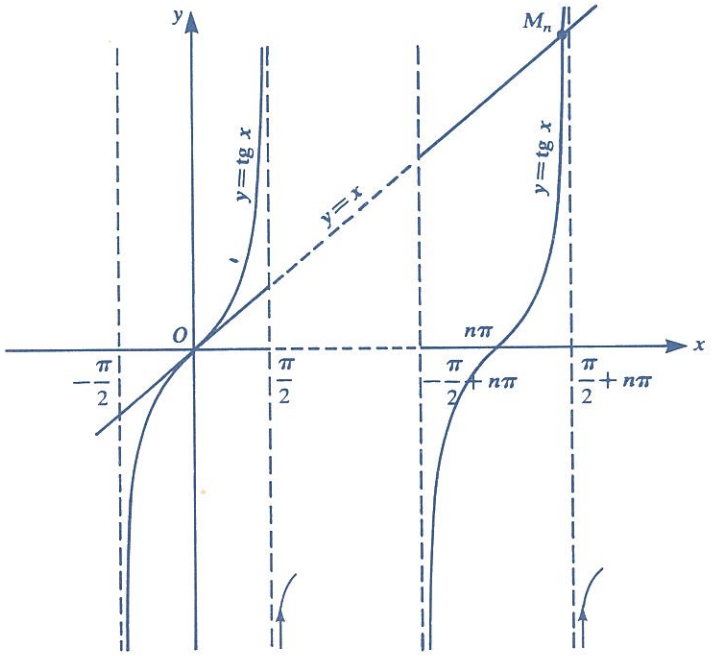


Figure 22.

Écrivons-la donc $x = \text{tg } x$, et considérons $\varphi(x) = \text{tg } x - x$, définie et dérivable sur chacun des intervalles $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.

$\varphi'(x) = \text{tg}^2 x \geqslant 0$, φ est donc strictement croissante sur chacun de ces intervalles, ses valeurs extrêmes étant $-\infty$ et $+\infty$, il existe donc bien une valeur x_n et une seule de x telle que $\varphi(x) = 0$.

Cette étude est confirmée par la figure 22.

b) Sur cette figure, x_n est l'abscisse du point M_n et u_n est la distance de ce point à l'asymptote $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$, on voit que u_n tend vers 0 pour $n \longrightarrow +\infty$.

Démontrons-le et cherchons un équivalent de u_n.

On a

$$\text{tg } x_n = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-u_n\right) = \text{cotg } u_n = x_n, \text{ tg } u_n = \frac{1}{x_n}$$

Or $x_n \in \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$, donc $x_n \longrightarrow +\infty$ quand $n \longrightarrow +\infty$, et tg $u_n \longrightarrow 0$. Mais $u_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$, donc $u_n \longrightarrow 0$, et $u_n \sim \text{tg } u_n \sim \frac{1}{x_n} \sim \frac{1}{n\pi}$, puisque $n\pi \pm \frac{\pi}{2} \sim n\pi$.

D'après la règle de l'ordre, la série à termes positifs $\{u_n\}$ est donc divergente.

■ **4.** Déterminer, dans la transformation de Joukovski $z \longrightarrow Z = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, les transformées : *a*) des cercles de centre O et *b*) des droites passant par O.

---

a) Sur le cercle C de centre O, de rayon R, $z = Re^{i\theta}$, $(R \neq 0)$ d'où

$$Z = \frac{1}{2}\left(Re^{i\theta}+\frac{1}{R}e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta + \frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta$$

Les équations paramétriques de la transformée sont

$$X = \frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta = a\cos\theta$$

$$Y = \frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta = b\sin\theta$$

Il s'agit, si $R \neq 1$, d'une ellipse de centre O, d'axe focal Ox, d'axe non focal Oy, de demi-axes a et $|b|$, de distance focale $c = \sqrt{a^2-b^2} = 1$, donc de foyers $F(1, 0)$ et $F'(-1, 0)$.

Ces foyers, indépendants de R, sont les points invariants de la transformation.

Si $R=1$, l'ellipse se réduit au segment FF'.

On obtient, quand R varie, l'ensemble des ellipses *homofocales* de foyers F et F'. Une de ces ellipses est la transformée de chacun des deux cercles (O, R) et $\left(O, \frac{1}{R}\right)$.

b) Une droite Δ passant par O, autre que Oy, a pour équation $y=mx$, on a $z=x(1+im)$, alors

$$Z=X+iY=\frac{1}{2}\left[(1+im)\,x+\frac{1}{(1+im)\,x}\right]=\frac{1}{2}\left[(1+im)\,x+\frac{1-im}{(1+m^2)\,x}\right]$$

d'où $$X=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{(m^2+1)\,x}\right],\quad Y=\frac{m}{2}\left[x-\frac{1}{(m^2+1)\,x}\right].$$

En éliminant le paramètre m, on obtient

$$X^2-\frac{Y^2}{m^2}=\frac{1}{m^2+1}\quad \text{ou}\quad (m^2+1)\,X^2-\frac{m^2+1}{m^2}\,Y^2=1\ (m\neq 0)$$

Pour $m=0$, la transformée, définie par $X=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$, $Y=0$, est l'ensemble des deux demi-droites Fx et $F'x'$ (fig. 23). La transformée de Oy est définie par $Z=\frac{1}{2}\left(iy-\frac{i}{y}\right)$, c'est Oy lui-même. Dans le cas général on obtient une hyperbole d'axe focal Ox, d'axe non focal Oy, de demi-axes $a=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$, $b=\frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}$, de distance focale $c=\sqrt{a^2+b^2}=1$, donc de foyers F et F'. Quand m varie, on obtient toutes les hyperboles homofocales de foyers F et F'.

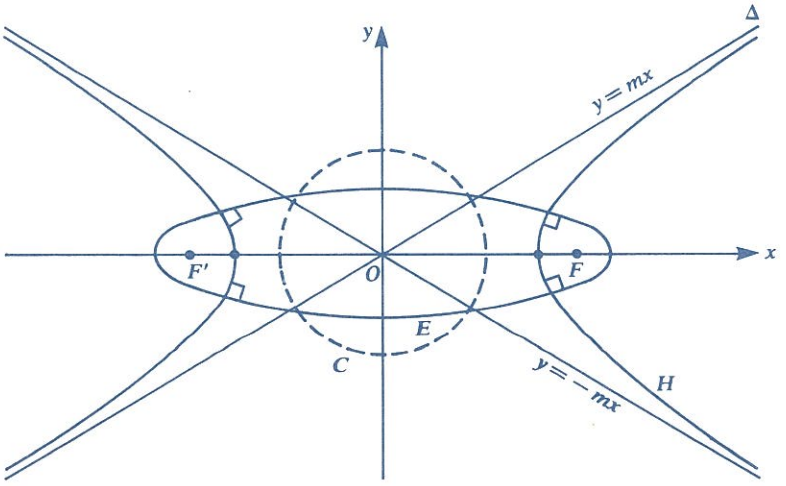


Figure 23.

La transformation de Joukovski étant conforme (puisque la fonction est holomorphe), ces ellipses et hyperboles homofocales, transformées de courbes deux à deux orthogonales, sont elles-mêmes deux à deux orthogonales.

Notons que les droites $y = mx$ et $y = -mx$ ont la même transformée et sont les asymptotes de cette transformée (H). La figure 23 correspond à $R \simeq 0{,}55$.

■ **5.** Calculer par la méthode des résidus l'intégrale de Wallis $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta \, d\theta$.

Par des considérations de symétrie immédiate, on a $I_n = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta \, d\theta$.

Posant $e^{i\theta} = z$, $dz = ie^{i\theta} d\theta$, on est ramené à

$$4 I_n = \int_{C^+} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{dz}{iz} = -\frac{i}{2^{2n}} \int_{C^+} \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} dz$$

C étant le cercle trigonométrique.

La fonction à intégrer est méromorphe sur $\mathbb{C}$ et son seul pôle, d'ordre $2n+1$, est zéro. On a donc $4 I_n = -\frac{i}{2^{2n}} \cdot 2i\pi \cdot R_0 = 2^{1-2n}\pi R_0$, R_0 étant le résidu en 0 de $f(z) = \frac{1}{z}\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n}$ c'est-à-dire le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de $f(z)$, donc le terme constant dans le développement de $\left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n}$ par la formule du binôme. Ainsi $R_0 = C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)}$ et

$$I_n = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots (2n)}$$

résultat déjà obtenu dans le tome 1.

■ **6.** a étant un réel supérieur à 1, C le cercle trigonométrique, calculer l'intégrale $I(a) = \int_{C^+} \frac{\mathrm{Log}(a+z)}{z} dz$. En déduire, pour a positif différent de 1, la valeur de $J(a) = \int_0^{\pi} \mathrm{Log}(a^2 + 1 + 2a\cos\theta) \, d\theta$, et calculer l'intégrale

$$K(\lambda) = \int_0^{\pi} \mathrm{Log}(\lambda + \cos\theta) \, d\theta, \quad \lambda > 1.$$

Que vaut $J(1)$? On rapprochera cet exercice de l'exercice n° 6 du chapitre précédent.

$\mathrm{Log}(a+z)$ est holomorphe sur le domaine $|z| \leqslant 1$, car :

$$\mathrm{Re}(a+z) \geqslant a - 1 > 0.$$

$\dfrac{\text{Log}(a+z)}{z}$ a pour seul pôle $z=0$, et son résidu en ce pôle est Log a, on a donc $I(a)=2i\pi \text{ Log } a$.

Dans $I(a)$, posons $z=e^{i\theta}$, on a $I(a)=\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\text{Log}(a+e^{i\theta})}{e^{i\theta}}\cdot ie^{i\theta}\,d\theta$,

soit

$$I(a)=i\int_{-\pi}^{\pi} \text{Log}(a+\cos\theta+i\sin\theta)\,d\theta$$

$$=i\int_{-\pi}^{\pi} (\text{Log}\sqrt{(a+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}+i\,\text{Arg}(a+e^{i\theta}))\,d\theta$$

$$=i\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\text{Log}(a^2+1+2a\cos\theta)\,d\theta-\int_{-\pi}^{\pi} \text{Arg}(a+e^{i\theta})\,d\theta$$

La deuxième intégrale est nulle puisque $I(a)$ est imaginaire pure, d'ailleurs Arg $(a+e^{i\theta})$, ici égal à Arc tg $\dfrac{\sin\theta}{a+\cos\theta}$, est une fonction impaire.

La première fonction étant paire,

$$I(a)=i\int_{0}^{\pi} \text{Log}(a^2+1+2a\cos\theta)\,d\theta=2i\pi \text{ Log } a$$

et $$\forall a>1,\quad J(a)=2\pi \text{ Log } a$$

Pour $0<a<1$, posons $a=\dfrac{1}{b}$, $b>1$, il vient

$$J(a)=\int_{0}^{\pi} \text{Log}\left(\frac{1}{b^2}+1+\frac{2}{b}\cos\theta\right)d\theta$$

$$=\int_{0}^{\pi} [\text{Log}(1+b^2+2b\cos\theta-\text{Log } b^2]\,d\theta$$

$$=J(b)-2\pi \text{ Log } b=0$$

Comme $J(a)$ s'écrit encore $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\left[\text{Log } 2a+\text{Log}\left(\frac{a^2+1}{2a}+\cos\theta\right)\right]d\theta$, on peut, pour $\lambda>1$, ramener $K(\lambda)$ à $J(a)$ en déterminant $a>1$ tel que $\lambda=\dfrac{a^2+1}{2a}$, d'où $a=\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}$

alors $$K(\lambda)=J(a)=\pi \text{ Log}(2a)$$

$$=2\pi \text{ Log } a-\pi \text{ Log}(2a)=\pi \text{ Log}\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}}{2}.$$

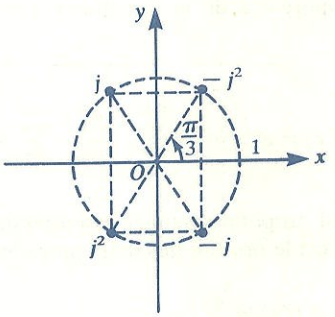
D'après l'exercice rappelé $J(1)=\displaystyle\int_{0}^{\pi} \text{Log}(2+2\cos\theta)\,d\theta=0$, on retrouve la continuité de $J(a)$ sur $[0,+\infty[$.

■ **7.** Calculer les intégrales $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+x^2+1}$ et $J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^4+x^2+1}dx$.

---

a) D'après un résultat du cours, I est le produit par $2i\pi$ de la somme des résidus de $f(z)=\frac{1}{z^4+z^2+1}$ en ses pôles de parties imaginaires positives.

$z^4+z^2+1=0$ pour $z^2=j=e^{2i\frac{\pi}{3}}=j^4$ (car $j^3=1$), donc $z=\pm j^2$ et pour $z^2=j^2=e^{4i\frac{\pi}{3}}$, donc $z=\pm j$.



Les pôles à retenir sont j et $-j^2$; ce sont des pôles simples.
Pour un tel pôle le résidu est

$$\frac{1}{(z^4+z^2+1)'}=\frac{1}{4z^3+2z}=\begin{cases}\frac{1}{4+2j}, & \text{pour } z=j\\ \frac{1}{-4-2j^2}, & \text{pour } z=-j^2\end{cases}$$

donc $$I=2i\pi\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+j}-\frac{1}{2+j^2}\right)=i\pi\cdot\frac{j^2-j}{5+2(j+j^2)}$$

Or $j-j^2=2i\sin\frac{2\pi}{3}=i\sqrt{3}$, et $j+j^2=-1$

donc $$I=\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

b)

$$J=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x^4+x^2+1}dx=\frac{1}{2}I-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2ix}}{x^4+x^2+1}dx=\frac{1}{2}(I-K)$$

$K=2i\pi\left(\frac{e^{2ij}}{4+2j}-\frac{e^{-2ij^2}}{4+2j^2}\right)$, la même formule s'appliquant et les pôles à considérer étant les mêmes que ci-dessus.

Or

$$e^{2ij}=e^{i(-1+i\sqrt{3})}=e^{-\sqrt{3}-i},\qquad e^{-2ij^2}=e^{-i(-1-i\sqrt{3})}=e^{-\sqrt{3}+i}$$

d'où après calculs $K = \pi e^{-\sqrt{3}} \left(\sin 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 1 \right)$

et enfin $I = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\sqrt{3}}{3} - e^{-\sqrt{3}} \left(\sin 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 1 \right) \right]$

Remarquons que le calcul de I peut être obtenu « élémentairement » (par la décomposition en éléments simples et le calcul des primitives). Il n'en va pas de même de celui de K, qui exige le passage par la variable complexe.

■ **8.** Calculer, sous forme d'intégrales, les coefficients du développement en série de Laurent par rapport à z de la fonction $f(z) = e^{\frac{x}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}$, x étant un réel donné.

En écrivant

$$f(z) = e^{\frac{x}{2}z} \cdot e^{\frac{x}{2z}} = \sum_{0}^{+\infty} \frac{x^n z^n}{2^n n!} \cdot \sum_{0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n n! z^n}$$

on voit que $z = 0$ est un point singulier essentiel de f, le développement de f en série de Laurent est le produit des deux précédents, tous deux absolument convergents $\forall z \neq 0 : f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n$.

Nous savons que $c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} \frac{f(u)}{u^{n+1}} \, du$, (paragraphe D, 5), C étant un cercle quelconque de centre O, par exemple le cercle trigonométrique.

Donc $$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C^+} u^{-n-1} \, e^{\frac{x}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)} \, du$$

En posant $u = e^{i\theta}$

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-(n+1)i\theta} \cdot e^{x \cos \theta} \cdot ie^{i\theta} \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{x \cos \theta} (\cos n\theta - i \sin n\theta) \, d\theta$$

La partie imaginaire est nulle et il reste $c_n = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} e^{x \cos \theta} \cdot \cos n\theta \, d\theta$, les fonctions $e^{x \cos \theta} \cos n\theta$ et $e^{x \cos \theta} \sin n\theta$ étant respectivement paire et impaire.

Cette formule n'est autre que celle donnant le coefficient général du développement en série de Fourier $\varphi(\theta) = e^{x \cos \theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$.

On voit sur cet exemple que les séries de Fourier constituent, au moins dans certains cas, un cas particulier des séries de Laurent, obtenu ici pour $|z| = 1$.

■ **9.** Démontrer $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

Écrire $f_n(z)=\left(1+\frac{x}{n}+\frac{iy}{n}\right)^n=\rho_n e^{i\theta_n}$, calculer ρ_n et θ_n et démontrer, à l'aide des développements limités dans $\mathbb{R}$, que $\lim \rho_n = e^x$ et $\lim \theta_n = y$.

■ **10.** Calculer à 10^{-5} près, à l'aide du théorème des résidus, l'intégrale

$$J=\int_0^{2\pi} e^{\sin x}\,dx.$$

$J=2\pi R_0$, R_0 étant le résidu en 0 de $f(z)=\frac{1}{z}e^{\frac{1}{2}(z-\frac{1}{z})}$, c'est-à-dire le terme constant dans le produit des deux séries :

$$\sum_0^{+\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n\cdot\frac{1}{n!} \qquad \text{et} \qquad \sum_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{2iz}\right)^n\frac{1}{n!}$$

On obtient

$$R_0=\sum_0^{+\infty}\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}.$$

En majorant le reste R_n par

$$\rho_n=\frac{1}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2}\cdot\sum_0^{+\infty}2^{-2p}=\frac{1}{3\cdot 2^{2n}[(n+1)!]^2},$$

on voit que quatre termes suffisent et que

$$R_0\simeq 1{,}281\,68, \qquad J\simeq 8{,}053\,03.$$

■ **11.** Vérifier, par les conditions de Cauchy, que Log z est holomorphe lorsque z n'est pas un réel négatif ou nul, et calculer sa dérivée.

■ **12.** z_0 étant donné, on considère la suite récurrente complexe définie par

$$z_n=\frac{4iz_{n-1}+3-4i}{4(z_{n-1}-1-i)} \quad \text{pour } n\geqslant 1.$$

Montrer que, quel que soit z_0, cette suite est convergente. Quelle est sa limite?

La transformation homographique envisagée a un seul point invariant $\alpha=\frac{1+2i}{2}$, et la relation de récurrence s'écrit $\frac{1}{z_n-\alpha}=-2+\frac{1}{z_{n-1}-\alpha}$.

Si $z_0 \neq \alpha$, $\dfrac{1}{z_n - \alpha} = -2n + \dfrac{1}{z_0 - \alpha} \longrightarrow -\infty$, $z_n \longrightarrow \alpha$.
Si $z_0 = \alpha$, $z_1 = \alpha$, ..., $z_n = \alpha$ $\forall n$. Dans tous les cas $\lim z_n = \alpha$.

■ **13.** Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+x+1)}$.

En calculant le résidu au pôle double i par changement de variable et division de polynômes, on obtient $I = \dfrac{\pi}{3}(2\sqrt{3} - 3)$.

■ **14.** Établir les conditions d'holomorphie sur un domaine $\mathbb{D}$ de la fonction $f(z) = P(r, \theta) + iQ(r, \theta)$, avec P, Q réelles, $r = |z|$ et $\theta = \text{Arg } z$.

On obtient $\dfrac{\partial P}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial Q}{\partial \theta}$, $\qquad \dfrac{\partial Q}{\partial r} = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta}$.

■ **15.** Développer en série de Fourier la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2 + \cos x}$, en calculant les coefficients par la méthode des résidus.

Dans a_0 et a_n, on pose $e^{ix} = z$ et on intègre sur le cercle trigonométrique, on obtient $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left[1 + 2\displaystyle\sum_{1}^{+\infty} (\sqrt{3} - 2)^n \cos nx\right]$.

■ **16.** La fonction $f(z)$ n'ayant que des zéros simples et étant holomorphe sur $\mathbb{D}$, C étant une courbe fermée de $\mathbb{D}$ entourant n zéros de f, trouver la valeur de de

$$I = \int_{C^+} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

On trouve $I = 2in\pi$.

■ **17.** Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{C^+} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z+1}\,dz$, C étant un cercle de centre O et de rayon $r > 1$.

$J = 2i\pi(R_{-1} + R_0)$, $\quad R_{-1} = \text{résidu au pôle } (-1) = \dfrac{1}{e}$

$R_0 =$ résidu au point essentiel O

$= \text{coefficient de } \frac{1}{z} \text{ dans } (1 - z + z^2 - \ldots + (-1)^n z^n + \ldots)$

$$\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \ldots + \frac{1}{n!\, z^n} + \ldots\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} + \ldots = 1 - \frac{1}{e},$$

donc $J = 2\, i\pi$.

N.B. : D'autres exercices sur ce chapitre seront traités ou proposés dans le chapitre 3.

CHAPITRE 3

TRANSFORMATION DE FOURIER

1. INTRODUCTION

Dans la forme complexe du développement en série de Fourier d'une fonction T-périodique satisfaisant aux hypothèses classiques, on peut observer une certaine symétrie dans les formules :

$$\frac{1}{2}[f(t^+)+f(t^-)]=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}, \qquad c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,e^{-in\omega t}\,dt, \text{ où } \omega=\frac{2\pi}{T}$$

La suite (c_n) des coefficients de Fourier associés à f peut exister, d'ailleurs, même si la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$ ne converge pas vers $f(t)$ ou $\frac{1}{2}[f(t^+)+f(t^-)]$. Dans ce qui suit, nous allons définir une transformation analogue à $f(t) \longrightarrow (c_n)$ lorsque la fonction f n'est plus périodique, c'est-à-dire lorsque sa période est en quelque sorte devenue infinie.

2. DÉFINITION DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE FONCTION $f(t)$

Soit $f(t)$ une fonction intégrable sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}$. On peut lui associer, sous certaines conditions, la fonction

$$\boxed{\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{ixt}\,dt}$$

Cette fonction φ est appelée transformée de Fourier de f. On la note $\mathcal{F}(f)$, et la transformation $f \xrightarrow[\mathcal{F}]{} \varphi$ se nomme transformation de Fourier. f est **transformable au sens de Fourier** pourvu que l'intégrale qui définit φ

soit convergente. Il suffit pour cela que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt$ soit convergente, ce que l'on exprime en disant que $f(t)$ est absolument intégrable sur $]-\infty, +\infty[$. Cependant cette condition n'est pas nécessaire puisque, par exemple $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} e^{it}\,dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{e}$ (chapitre précédent), donc $\frac{t}{1+t^2}$ est transformable sans être absolument intégrable sur $]-\infty, +\infty[$.

3. FORMULES DE RÉCIPROCITÉ DE FOURIER

La relation définissant φ connaissant f joue le rôle de celle donnant c_n connaissant f périodique. Nous allons chercher à exprimer f en fonction de φ.

Nous supposerons que f est absolument intégrable sur $]-\infty, +\infty[$, et que, sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}$, f et sa dérivée f' sont continues sauf en un nombre fini de points de discontinuité de première espèce, ce que l'on exprime souvent en disant que f et f' sont continues « presque partout » (ce qui implique qu'elles sont bornées).

• Cherchons tout d'abord $\lim_{\omega \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin \omega t}{t}\,dt$, intégrale convergente puisque $\left|\frac{f(t)}{t}\right| \leqslant f(t)$ quand $|t| \geqslant 1$.

Écrivons :

$$J(\omega) = \int_{-\infty}^{-a} g(t)\,dt + \int_{-a}^{+a} g(t)\,dt + \int_{a}^{+\infty} g(t)\,dt = J_1 + J_2 + J_3$$

avec $g(t) = f(t) \frac{\sin \omega t}{t}$.

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, on peut $\forall \varepsilon > 0$ déterminer a_0 tel que $a \geqslant a_0 \Longrightarrow |J_1| < \varepsilon$ et $|J_3| < \varepsilon$. Donc $\lim_{\omega \to +\infty} J(\omega) = \lim_{\omega \to +\infty} J_2(\omega)$, a étant supposé fixé.

Or
$$J_2 = \int_{-a}^{0} g(t)\,dt + \int_{0}^{a} g(t)\,dt = \int_{0}^{a} [g(t) + g(-t)]\,dt$$
$$= \int_{0}^{a} [f(t) + f(-t)] \frac{\sin \omega t}{t}\,dt$$

Soit

$$h(t)=\frac{f(t)+f(-t)}{t}=\frac{f(t)-f(0^+)}{t}-\frac{f(-t)-f(0^-)}{-t}+\frac{f(0^+)+f(0^-)}{t}$$
$$=h_1(t)-h_2(t)+h_3(t)$$

en envisageant le cas où f est discontinue en 0.

Si f est continue sur $[-a, +a]$, sauf en 0, $h_1(t)$ et $h_2(t)$ sont continues sur $[0, a]$ car $\lim_{t\to 0^+} h_1(t)=f'(0^+)$ et $\lim_{t\to 0^+} h_2(t)=f'(0^-)$ et

$$\int_0^a h_1(t)\sin \omega t\,dt=\left[-h_1(t)\frac{\cos \omega t}{\omega}\right]_0^a+\int_0^a h_1'(t)\frac{\cos \omega t}{\omega}dt \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0$$

puisque h_1 et h_1' sont bornées (comme le sont f et f'). Ce même raisonnement s'applique à $\int_0^a h_2(t)\sin \omega t\,dt$.

$$\text{Ainsi } \lim_{\omega\to+\infty} J(\omega)=[f(0^+)+f(0^-)]\cdot \lim_{\omega\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin \omega t}{t}dt.$$

Mais par le changement de variable $\omega t=u$, on voit que

$$\int_0^a \frac{\sin \omega t}{t}dt=\int_0^{\omega a}\frac{\sin u}{u}du \longrightarrow \int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2}$$

Si $f(t)$ présente sur $[0, a]$ des discontinuités, les intégrales de $h_1(t)\sin \omega t$ et de $h_2(t)\sin \omega t$ sur chacun des intervalles où f est continue tendent vers 0 et la conclusion reste la même, à savoir

$$\lim_{\omega\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin \omega t}{t}dt=\frac{\pi}{2}[f(0^+)+f(0^-)] \qquad (1)$$

En cas de continuité de f en 0, cette limite est évidemment $\pi f(0)$.

• α étant un nombre donné, la formule (1) donne encore

$$\lim_{\omega\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\alpha)\frac{\sin \omega t}{t}dt=\frac{\pi}{2}[f(\alpha^+)+f(\alpha^-)]$$

Or $\dfrac{\sin \omega t}{t}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\omega}^{\omega} e^{itu}\,du$, donc

$$\lim_{\omega\to+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\alpha)dt\int_{-\omega}^{\omega} e^{itn}\,du\right]=\pi[f(\alpha^+)+f(\alpha^-)].$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\alpha)\, e^{itu}\, dt$ est normalement, donc uniformément, convergente, on peut l'intégrer sous le signe $\int$ par rapport à u, et, de ce fait, intervertir les intégrations ci-dessus, ce qui donne

$$\lim_{\omega \to +\infty} \int_{-\omega}^{\omega} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\alpha)\, e^{itu}\, dt = \pi[f(\alpha^+)+f(\alpha^-)]$$

Si enfin nous posons $t+\alpha=x$, nous obtenons

$$\lim_{\omega \to +\infty} \int_{-\omega}^{\omega} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{iu(n-\alpha)}\, dx = \pi[f(\alpha^+)+f(\alpha^-)]$$

Comme $\varphi(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{iux}\, dx$ définit $\varphi=\mathcal{F}(f)$ transformée de Fourier de f, on voit que

$$\frac{1}{2}[f(\alpha^+)+f(\alpha^-)]=\frac{1}{2\pi}\lim_{\omega \to +\infty} \int_{-\omega}^{\omega} \varphi(u)\, e^{-i\alpha u}\, du$$

Il en résulte, en revenant aux notations du paragraphe 2, les formules dites de **réciprocité de Fourier,** qui définissent $\varphi=\mathcal{F}(f)$ et $f=\mathcal{F}^{-1}(\varphi)$:

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{ixt}\, dt,$$

$$\frac{1}{2}[f(t^+)+f(t^-)]=\frac{1}{2\pi}\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} \varphi(x) = e^{-itx}\, dx$$

Remarques.

Si $\varphi(x)$ est absolument intégrable sur $]-\infty, +\infty[$, cas fréquent,

$$\frac{1}{2}[f(t^+)+f(t^-)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-itx}\, dx.$$

Si, de plus, f est continue, $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-itx}\, dx$, la **réciprocité** s'accentue, car si :

$$\varphi(x)=\mathcal{F}(f(t)),$$
$$2\pi f(-x)=\mathcal{F}(\varphi(t)).$$

• Observons que les notations concernant la transformation de Fourier, et même la définition, sont susceptibles de variantes : ainsi certains auteurs écrivent

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{ixt}\, dt,\ f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{a \to +\infty} \int_{-a}^{a} \varphi(x)\, e^{-itx}\, dx$$

alors si $\varphi(x)=\mathcal{F}(f(t))$, $f(-x)=\mathcal{F}(\varphi(t))$.

• Si f est paire, il en est de même de φ, et

$$\varphi(x)=2\int_0^{+\infty} f(t)\cos xt\,\mathrm{d}t,\quad f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\varphi(x)\cos tx\,\mathrm{d}x$$

De même si f est impaire, φ l'est aussi et

$$\varphi(x)=2i\int_0^{+\infty} f(t)\sin xt\,\mathrm{d}t,\quad f(t)=-\frac{i}{\pi}\int_0^{+\infty}\varphi(x)\sin tx\,\mathrm{d}x$$

Les intégrales de ce type sont des intégrales de Fourier.

4. PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER

• Comme l'intégration sur laquelle elle est fondée, la transformation de Fourier est linéaire :

$$\mathcal{F}[\lambda f(t)+\mu g(t)]=\lambda\mathcal{F}[f(t)]+\mu\mathcal{F}[g(t)]$$

pour tous λ, μ complexes.

• Soit $\varphi(x)=\mathcal{F}[f(t)]$ et α un réel non nul. Cherchons $\mathcal{F}[f(\alpha t)]=\psi(x)$, c'est-à-dire $\psi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha t)\,e^{ixt}\,\mathrm{d}t$. Le changement de variable $\alpha t=u$ donne

$$\psi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon f(u)\,e^{ix\frac{u}{\alpha}}\frac{\mathrm{d}u}{\alpha},\quad \varepsilon=\pm 1,\ \text{du signe de } \alpha.$$

Il en résulte $\psi(x)=\mathcal{F}[f(\alpha t)]=\dfrac{1}{|\alpha|}\,\varphi\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$.

C'est la formule dite d'homothétie.

• Un raisonnement analogue montre que

$$\mathcal{F}[f(t)]=\varphi(x)\Longrightarrow\mathcal{F}[f(t-t_0)]=e^{ixt_0}\varphi(x),\quad (t_0\ \text{réel})$$

formule de translation sur t.

• Cherchons quel est l'effet sur la transformée de Fourier d'une dérivation par rapport à t. Précisément, supposons que f' existe et admet comme f une transformée de Fourier, et que f est continue et tend vers zéro quand t devient infini. On a

$$\mathcal{F}[f'(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,e^{ixt}\,\mathrm{d}t,\ \text{soit en intégrant par parties,}$$

$$\mathcal{F}[f'(t)]=[f(t)\,e^{ixt}]_{t=-\infty}^{t=+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(ixe^{ixt})\,\mathrm{d}t$$

$$=-ix\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{ixt}\,\mathrm{d}t,$$

donc $\mathcal{F}[f'(t)] = -ix\mathcal{F}[f(t)]$

Avec les hypothèses voulues, faciles à préciser, on aura

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (-ix)^n \mathcal{F}[f(t)]$$

5. PRODUIT DE CONVOLUTION

On appelle ainsi, sous réserve de convergence de l'intégrale introduite, la fonction $h(t) = f(t) \star g(t)$ définie comme suit :

$$\boxed{h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, g(t-u)\, du}$$

Le changement de variable $t - u = v$ montre aisément que

$$g \star f = f \star g$$

Supposons f et g transformables au sens de Fourier, avec $\mathcal{F}(f) = \varphi$, $\mathcal{F}(g) = \psi$.

En observant que $g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, e^{-itx}\, dx$, on a

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-i(t-u)x}\, dx \right] du$$

Si nous admettons la légitimité de l'intégration sous le signe $\int$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, e^{-itx} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{iux}\, du \right] dx$$

Or l'intégrale placée sous le signe $\int$ n'est autre que $\varphi(x)$, on a donc

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, \varphi(x)\, e^{-itx}\, dx = \mathcal{F}^{-1}[\varphi(x)\, \psi(x)]$$

Il en résulte la formule

$$\boxed{\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)}$$

6. TRANSFORMÉES DE QUELQUES FONCTIONS SIMPLES

• Fonction de Dirichlet : il s'agit de la fonction $f(t)$ définie comme suit :

$$f(t)=1 \quad \text{si} \quad |t|<1$$
$$f(t)=\frac{1}{2} \quad \text{si} \quad |t|=1$$
$$f(t)=0 \quad \text{si} \quad |t|>0$$

Cette fonction est paire, sa transformée est

$$\varphi(x)=2\int_0^{+\infty} f(t)\cos xt\,\mathrm{d}t=2\int_0^1 \cos xt\,\mathrm{d}t=2\frac{\sin x}{x}, \quad \text{paire.}$$

Il est facile, sur cet exemple, de vérifier la validité de la formule réciproque

$$I=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\varphi(x)\cos tx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}2\frac{\sin x\cos tx}{x}\,\mathrm{d}x \quad (\text{où } t\geqslant 0)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1+t)x}{x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-t)x}{x}\,\mathrm{d}x$$

$(1+t)x=u$ montre que la première intégrale vaut $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{car}\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\right)$.

$(1-t)x=y$, pour $t\neq 1$ montre que la seconde vaut $\frac{\pi}{2}$ si $t<1$, ou $-\frac{\pi}{2}$ si $t>1$; pour $t=1$, elle est manifestement nulle.

On vérifie donc $I=1$ si $0\leqslant t<1$; $I=\frac{1}{2}$ si $t=1$; $I=0$ si $t>1$; donc, vu la parité de I, $I=f(t)$.

• On peut observer que $2\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\cos xt\,\mathrm{d}t=\mathcal{F}\left(\frac{\sin t}{t}\right)=\pi f(x)$, f désignant encore la fonction de Dirichlet (appelée aussi facteur discontinu de Dirichlet) : on vérifie sur cet exemple que la condition d'absolue convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas nécessaire à l'existence de la transformée de Fourier de $f(t)$, puisque $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t$ diverge (voir exercice traité dans le tome 1).

• Calculons encore la transformée de $f(t)=e^{-|t|}$, c'est-à-dire

$$\varphi(x)=2\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos xt\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty} e^{(-1-ix)t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{1-ix}+\frac{1}{1+ix}=\frac{2}{1+x^2}$$

La formule réciproque donne $e^{-|t|}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} 2\,\frac{\cos tx}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, relation que l'on peut facilement vérifier par la méthode des résidus (exercice 1).

7. APPLICATIONS DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER

Les propriétés vues plus haut, notamment celles concernant la dérivation de $f(t)$ et la translation sur t, sont à l'origine d'applications de la transformation à des équations fonctionnelles, c'est-à-dire où l'inconnue est une fonction; en particulier, équations aux dérivées partielles : dans le chapitre consacré à ces équations, nous verrons l'application au problème des cordes vibrantes. Pour les équations différentielles, on utilise plus couramment la transformation de Laplace, valable dans des hypothèses plus larges. Un exemple d'équation fonctionnelle fait l'objet de l'exercice 3 à la fin de ce chapitre.

8. FORMULES DE PARSEVAL ET DE PLANCHEREL

Sauf dans des cas exceptionnels, les fonctions couramment utilisées dans la transformation de Fourier sont **de carré intégrable,** c'est-à-dire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$ est convergente (le module étant inutile si f est réelle).

On démontre, et nous admettrons, que si $\varphi(x)=\mathcal{F}[f(t)]$,

on a $$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x}$$

(formule de Parseval)

Plus généralement nous admettrons aussi que si

$$\varphi(x)=\mathcal{F}[f(t)] \text{ et } \psi(x)=\mathcal{F}[g(t)]$$

f et g n'étant pas nécessairement réelles, on a

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\overline{g}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\cdot\overline{\psi}(x)\,\mathrm{d}x}$$

(formule de Plancherel)

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot\overline{g}(t)\,\mathrm{d}t$ définit sur l'espace des fonctions transformables au sens de Fourier un produit scalaire hermitien (voir t. 4) qui, à un coefficient $\frac{1}{2\pi}$ près, se conserve dans la transformation de Fourier.

Résumé du chapitre 3

• La transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ et la transformée inverse d'une fonction $\varphi(x)$ sont définies par les **formules de réciprocité de Fourier :**

$$\mathcal{F}[f(t)]=\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{ixt}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\varphi(x)]=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,e^{-itx}\,\mathrm{d}x$$

lorsque $f(t)$ et $\varphi(x)$ sont absolument intégrables sur $]-\infty,+\infty[$ et lorsque $f(t)$ est continue.

Dans le cas où f n'est pas absolument intégrable mais seulement continue « presque partout », ainsi que f', la seconde formule est à remplacer par

$$\frac{1}{2}[f(t^+)+f(t^-)]=\frac{1}{2\pi}\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\varphi(x)\,e^{-itx}\,\mathrm{d}x$$

• **Propriétés.**

— linéarité : $\mathcal{F}(\lambda f+\mu g)=\lambda\mathcal{F}(f)+\mu\mathcal{F}(g)$

— homothétie : $\mathcal{F}[f(t)]=\varphi(x)\Longrightarrow\mathcal{F}[f(\alpha t)]=\frac{1}{|\alpha|}\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$

— translation : $\mathcal{F}[f(t)]=\varphi(x)\Longrightarrow\mathcal{F}[f(t-t_0)]=e^{ixt_0}\varphi(x)$

— dérivation : $\mathcal{F}[f'(t)]=-ix\mathcal{F}[f(t)]$

— transformée du produit de convolution :

$$f(t)\star g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,g(t-u)\,\mathrm{d}u$$

$$\mathcal{F}(f\star g)=\mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}(g)$$

• **Formule de Parseval.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 \, dx$$

• **Formule de Plancherel.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\overline{g}(t) \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\overline{\psi}(x) \, dx$$

EXERCICES

■ **1.** Déterminer les transformées de Fourier de

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}, \quad g(t) = \frac{1}{(t^2 + a^2)^2} \quad (a \text{ étant un réel positif}).$$

• Calculons $\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{t^2 + a^2} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos xt}{t^2 + a^2} \, dt$

(fonction paire : nous raisonnerons avec $x \geqslant 0$).

D'après le chapitre précédent, $\varphi(x)$ est égale au produit par $2i\pi$ du résidu de $F(z) = \frac{e^{xiz}}{z^2 + a^2}$ en son unique pôle de partie imaginaire positive, $z = ia$.

Ce résidu est $R = \left[\frac{e^{ixz}}{2z}\right]_{z=ia} = \frac{e^{-ax}}{2ia}$

donc $\varphi(x) = \frac{\pi}{a} e^{-ax}$, pour $x \geqslant 0$. Pour x quelconque réel, $\varphi(x) = \frac{\pi}{a} e^{-a|x|}$.

• $\psi(x) = \mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos xt}{(t^2 + a^2)^2} \, dt$, fonction paire où nous supposerons $x \geqslant 0$, peut être obtenue aussi par la méthode des résidus, mais plus simplement ici par dérivation sous le signe $\int$ par rapport au paramètre a (cette dérivation étant légitimée par la convergence normale des intégrales introduites). En effet

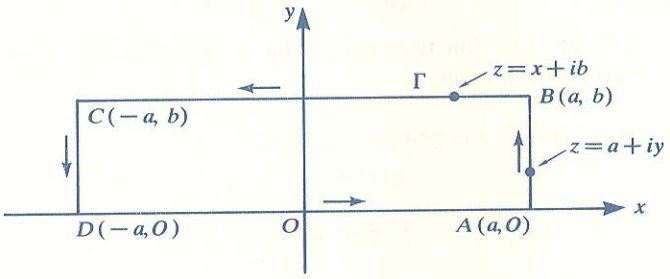
$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2a \cos xt}{(t^2 + a^2)^2} \, dt = -2a\,\psi(x) = -\frac{\pi}{a^2} e^{-a|x|} - \frac{\pi x}{a} e^{-a|x|}$$

d'où $$\psi(x) = \frac{\pi}{2a^3} e^{-a|x|}(1 + a|x|).$$

■ 2. *a*) En utilisant l'intégrale $\int_{\Gamma^+} e^{-z^2}\,dz$, où Γ est le rectangle défini sur la figure ci-dessous, et sa limite quand $a \longrightarrow +\infty$, calculer l'intégrale $J=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$.

b) En déduire la transformée de Fourier de $g(t)=e^{-\alpha t^2}$, $\alpha>0$. Pour quelle valeur de α a-t-on la relation $\mathcal{F}(g)=\lambda g$, λ étant une constante?

c) Vérifier sur cet exemple la formule de Parseval.



a) e^{-z^2} est holomorphe sur $\mathbb{C}$, on a donc $I=\int_{\Gamma^+} e^{-z^2}\,dz=0$.

D'autre part $I=I_1+I_2+I_3+I_4=\int_{DA}+\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}$

avec $I_1=\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}$

$$I_3=-\int_{-A}^{A} e^{-(x+ib)^2}\,dx=-\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\cdot e^{b^2}\cdot e^{-2ibx}\,dx$$

$$=-e^{b^2}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$$

et $\lim_{a\to+\infty} I_3=-e^{b^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=-J\cdot e^{b^2}$

$$I_2=\int_0^b e^{-(a+iy)^2}\,i\,dy=i\int_0^b e^{y^2-a^2}e^{-2aiy}\,dy$$

est majorée en module par $be^{b^2-a^2}$ et tend vers 0 pour a infini, il en est de même pour I_4.

Il en résulte $I=0=\sqrt{\pi}-Je^{b^2}$, et $J=\sqrt{\pi}\cdot e^{-b^2}$.

b) La transformée de Fourier de $e^{-t^2}=f(t)$ est

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\cos xt\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\cos 2bt\,dt=\sqrt{\pi}\,e^{-b^2}$$

avec $b=\frac{x}{2}$, donc $\mathcal{F}(e^{-t^2})=\sqrt{\pi}\cdot e^{-\frac{x^2}{4}}$.

D'après le théorème d'homothétie, si $\alpha > 0$,

$$g(t) = e^{-\alpha t^2} = f(\sqrt{\alpha}\cdot t), \quad \text{donc } \mathcal{F}[g(t)] = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

$$\mathcal{F}(e^{-\alpha t^2}) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$$

$$\mathcal{F}(g) = \lambda g \quad \text{si } -\alpha = -\frac{1}{4\alpha}, \quad \text{donc } \alpha = \frac{1}{2}$$

on obtient $$\mathcal{F}(e^{-\frac{t^2}{2}}) = \sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$e^{-\frac{t^2}{2}}$ est donc une fonction invariante, à un coefficient près, par la transformation de Fourier.

c) Revenons au cas général ci-dessus

$$g(t) = e^{-\alpha t^2}$$

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$$

et comparons $A = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\,dt$ et $B = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(x)\,dx$

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t\sqrt{2\alpha})^2}\cdot d(t\sqrt{2\alpha}) = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

$$B = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{\alpha}\,e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}\,dx = \frac{1}{2\alpha}\cdot\sqrt{2\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha}}\right)^2} d\left(\frac{x}{\sqrt{2\alpha}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

On a donc bien $A = B$, ce qui vérifie la formule de Parseval.

■ **3.** k étant une constante donnée, $f(t)$ une fonction donnée absolument intégrable sur $]-\infty, +\infty[$, on cherche les fonctions $y(t)$, absolument intégrables sur $]-\infty, +\infty[$, vérifiant l'équation fonctionnelle

$$y(t) - k[y(t+1) + y(t-1)] = f(t) \qquad (1)$$

Transformer cette équation par la transformation de Fourier, en déduire la transformée $\mathcal{F}[y(t)]$ et l'expression de $y(t)$ sous forme d'une intégrale.

Quelle condition doit vérifier k?

Si nous posons $\mathcal{F}[y(t)] = \psi(x)$, l'équation (1), compte tenu de la linéarité et de la formule de translation, a pour transformée :

$$\psi(x) - k[e^{-ix}\psi(x) + e^{ix}\psi(x)] = \varphi(x)$$

d'où on tire $$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{1 - 2k\cos x}$$

et $$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{1 - 2k\cos x}\,e^{-itx}\,dx$$

$\varphi(x)$, comme $f(t)$, étant absolument intégrable sur $]-\infty, +\infty[$, cette intégrale n'a de sens que si $1-2k\cos x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire si $|k|<\frac{1}{2}$.

■ **4.** Vérifier que, tout en n'étant pas absolument intégrable sur $]-\infty, +\infty[$, $f(t)=\dfrac{\sin t}{t^2}$ admet une transformée de Fourier $\varphi(x)$ que l'on calculera; on représentera graphiquement la fonction $y=-i\varphi(x)$. La formule réciproque s'applique-t-elle ici?

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t^2}\,dt$ n'est pas définie car $\dfrac{|\sin t|}{t^2}\sim\dfrac{1}{t}$ quand $t\longrightarrow 0^+$, et $\displaystyle\int_0^a\frac{|\sin t|}{t^2}\,dt$ n'a pas de sens. Par contre, pour $a>0$, $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t^2}\,dt$ est convergente.

Posons cependant $\varphi(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}e^{itx}\,dt$, en considérant comme nulle la partie réelle que l'on peut interpréter sous la forme

$$\lim_{a\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-a}\frac{\sin t\cos tx}{t^2}\,dt+\int_a^{+\infty}\frac{\sin t\cos tx}{t^2}\,dt\right)=0,$$

les deux intégrales étant manifestement opposées puisque la fonction à intégrer est paire.

On a donc $$\varphi(x)=2i\int_0^{+\infty}\frac{\sin t\sin tx}{t^2}\,dt$$

qui existe car, lorsque $t\longrightarrow 0$, $\dfrac{\sin t\sin tx}{t^2}\longrightarrow x$.

On a $$\varphi(x)=-i\int_0^{+\infty}\frac{\cos(1+x)t-\cos(1-x)t}{t^2}\,dt$$

que l'on intègre par parties :

$$\varphi(x)=i\left[\frac{\cos(1+x)t-\cos(1-x)t}{t}\right]_0^{+\infty}+i\int_0^{+\infty}\frac{(1+x)\sin(1+x)t-(1-x)\sin(1-x)t}{t}\,dt$$

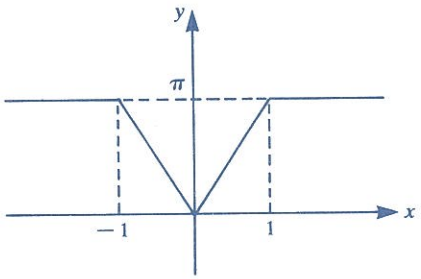
$$\varphi(x)=i(1+x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1+x)t}{t}\,dt+i(1-x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1-x)t}{t}\,dt$$

Un calcul déjà rencontré montre que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt$ est égale à $\dfrac{\pi}{2}$ si $\lambda>0$, à $-\dfrac{\pi}{2}$ si $\lambda<0$, à 0 si $\lambda=0$.

Il en résulte $\varphi(x)=\dfrac{i\pi}{2}[|x+1|-|x-1|]$.

$$y=-i\varphi(x)=\frac{\pi}{2}[|x+1|-|x-1|]$$

a pour graphe la ligne brisée ci-dessous.



La formule réciproque s'écrit

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\varphi(x)\,e^{-itx}\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{a\to+\infty}\int_{0}^{a}\varphi(x)\cos tx\,dx$$

elle n'a pas de sens puisque $\varphi(x)=i\pi$ quand $x\longrightarrow+\infty$.

■ **5.** Soit P et Q deux polynômes premiers entre eux tels que $d^0P\leqslant d^0Q$, Q étant un polynôme pair sans zéro réel. Calculer l'intégrale

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{(intégrale « spéciale » de Fourier)}$$

en faisant intervenir les résidus d'une fonction convenable aux pôles de $\dfrac{P}{Q}$ dont les parties imaginaires sont positives. Application : calculer

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Si P et Q sont de même degré, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=a+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, a étant une constante

et

$$I=a\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R(x)}{Q(x)}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx$$

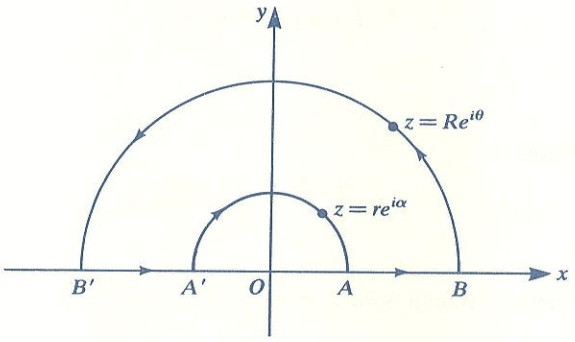
$$=a\pi+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{R(x)}{Q(x)}\frac{\sin x}{x}\,dx,\quad d^0R<d^0Q$$

Nous pouvons donc supposer $d^0P < d^0Q$. De plus les termes impairs dans P donnent naissance à des intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{Q(x)} \sin x \, dx$ qui sont nulles, nous pouvons donc supposer P paire, donc $\frac{p}{Q}$ paire.

Considérons alors le contour fermé Γ ci-dessous, déjà utilisé pour le calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, constitué par les deux demi-cercles (O, r) et (O, R) du demi-plan $y \geqslant 0$, reliés par les segments $-R \leqslant x \leqslant -r$, $r \leqslant x \leqslant R$ de l'axe réel, r étant assez petit et R assez grand pour que tous les pôles de $\frac{P}{Q}$, de parties imaginaires positives, soient intérieurs à Γ.

Soit

$$J(r, R) = \int_{\Gamma^+} \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\overrightarrow{B'A'}} + \int_{\overset{\frown}{A'A}} + \int_{\overrightarrow{AB}} + \int_{\overset{\frown}{BB'}}$$
$$= J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$



S étant la somme des résidus de $\frac{P(z)}{Q(z)} \frac{e^{iz}}{z}$ aux pôles de $\frac{P}{Q}$ de parties imaginaires positives, on a $J(r, R) = 2i\pi S$. Ceci reste vrai quand $r \longrightarrow 0$ et $R \longrightarrow +\infty$.

Or dans ces conditions

$$J_1 + J_3 = \int_{-R}^{-r} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{r}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{e^{ix}}{x} dx$$
$$= 2i \int_{r}^{R} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{\sin x}{x} dx \longrightarrow i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{\sin x}{x} dx = iI$$

les intégrales en cosinus s'éliminant car $\frac{P}{Q} \cdot \frac{\cos x}{x}$ est impaire.

Quand $R \longrightarrow +\infty$, $J_4 \longrightarrow 0$ d'après le premier lemme de Jordan, car

$$|zf(z)| = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| |e^{iR\cos\theta - R\sin\theta}| = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \cdot e^{-R\sin\theta} \longrightarrow 0$$

puisque $d^0 P < d^0 Q$ et $\sin\theta \geqslant 0$.

Quand $r \longrightarrow 0$, cherchons la limite de

$$J_2 = -\int_0^{\Pi} \frac{P(re^{i\alpha})}{Q(re^{i\alpha})} \cdot \frac{e^{ire^{i\alpha}}}{re^{i\alpha}}\, ire^{i\alpha}\, d\alpha$$

La fonction à intégrer tend, quand $r \longrightarrow 0$, vers $i\dfrac{P(0)}{Q(0)}$ et

$$J_2 \longrightarrow -i\pi \cdot \frac{P(0)}{Q(0)}$$

On a donc $$2i\pi S = iI - \pi i \frac{P(0)}{Q(0)}$$

et $$I = \pi\left(2S + \frac{P(0)}{Q(0)}\right)$$

Exemple.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} \cdot \frac{\sin x}{x}\, dx$$

Les pôles à retenir sont $z_1 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ et $z_2 = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$.

Le résidu, en un de ces pôles, de la fonction $f(z) = \dfrac{(z^2+1)e^{iz}}{z^5+z}$, est

$$\frac{z^2+1}{5z^4+1} \cdot e^{iz} = \frac{z^2+1}{-4} e^{iz} \qquad \text{puisque } z^4 = -1$$

$$\text{Res}(z_1) = -\frac{1}{4}(z_1^2+1)e^{iz_1} = -\frac{i+1}{4} \cdot e^{\frac{i-1}{\sqrt{2}}}$$

$$\text{Res}(z_2) = -\frac{1}{4}(z_2^2+1)e^{iz_2} = -\frac{1-i}{4} e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}}$$

$$S = \frac{1}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\sin\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \frac{P(0)}{Q(0)} = 1$$

$$I = \pi\left[1 + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\sin\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

■ **6.** Soit la fonction $f(x)$ impaire, 2π-périodique, égale à ch tx pour $0<x<\pi$.

Trouver son développement en série de Fourier, et en déduire un développement de $\dfrac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi t}{2}}$, en série de fractions rationnelles.

En utilisant $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{t^2+a^2}\right)=\dfrac{\pi}{a}e^{-a|x|}$ (ex. 1), trouver les transformées de Fourier de $\dfrac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi t}{2}}$ et $\dfrac{1}{\operatorname{ch}\alpha t}$. Déterminer ainsi une fonction invariante, à un coefficient près, par la transformation de Fourier.

• $f(x)=\sum_{1}^{+\infty} b_n \sin nx$ avec $b_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{ch} tx \sin nx \, dx$

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi}(e^{tx}+e^{-tx})(e^{inx}-e^{-inx})\,dx$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\left[\frac{e^{(t+in)x}}{t+in}+\frac{e^{(-t+in)x}}{-t+in}-\frac{e^{(t+in)x}}{t-in}+\frac{e^{(-t-in)x}}{t+in}\right]_0^{\pi}$$

d'où $b_n=\dfrac{2n}{\pi}\dfrac{1-(-1)^n \operatorname{ch}\pi t}{t^2+n^2}$

et, pour $0<x<\pi$, $\operatorname{ch} tx=\dfrac{2}{\pi}\sum_{1}^{+\infty} n\dfrac{1-(-1)^n \operatorname{ch}\pi t}{t^2+n^2}\sin nx$

Donnons à x la valeur $\dfrac{\pi}{2}$, on obtient, puisque $\sin 2n\dfrac{\pi}{2}=0$ et $\sin(2n+1)\dfrac{\pi}{2}=(-1)^n$

$$\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}=\frac{2}{\pi}(1+\operatorname{ch}\pi t)\sum_{0}^{+\infty}\frac{2n+1}{t^2+(2n+1)^2}(-1)^n$$

$$=\frac{4}{\pi}\operatorname{ch}^2\frac{\pi t}{2}\sum_{0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{t^2+(2n+1)^2}$$

enfin

$$\frac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi t}{2}}=\frac{4}{\pi}\sum_{0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{t^2+(2n+1)^2}$$ (série alternée semi-convergente).

Cette fonction est évidemment transformable au sens de Fourier, la série qui l'exprime est uniformément convergente car $|R_n| < \frac{2n+1}{t^2+(2n+1)^2} < \frac{1}{2n+1} < \varepsilon$ ne fait pas intervenir t, l'intégration terme à terme est donc possible et donne

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_{0}^{+\infty}(-1)^n(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2n+1}e^{-(2n+1)|x|}$$

$$= 4e^{-|x|}\sum_{0}^{+\infty}(-e^{-2|x|})^n \qquad (1)$$

Comme $\sum_{0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, avec $|z|<1$, on a pour $x \neq 0$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}}\right) = \frac{4e^{-|x|}}{1+e^{-2|x|}} = \frac{2}{\operatorname{ch} x} = \varphi(x)$$

Pour $x = 0$, la série (1) n'est plus convergente, mais le calcul direct de

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it\cdot 0}}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{\pi}\frac{du}{\operatorname{ch} u} = \frac{4}{\pi}[\operatorname{Arc\,tg} e^u]_{-\infty}^{+\infty} = 2 = \frac{2}{\operatorname{ch} 0}$$

montre que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}}\right) = \frac{2}{\operatorname{ch} x}$.

$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha t}\right)$ s'obtient par la formule d'homothétie :

si $\quad f(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}} \qquad \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha t} = f\left(\frac{2\alpha}{\pi}t\right)$

et $\quad \mathcal{F}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha t}\right) = \frac{\pi}{2\alpha}\cdot\frac{2}{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2\alpha}} = \frac{\pi}{\alpha\operatorname{ch}\frac{\pi x}{2\alpha}}$

En prenant $\alpha = \frac{\pi}{2\alpha}$, donc $\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, on obtient

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\pi}{2}}t}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{\pi}{2}}x}$$

$f(t)=\dfrac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,t}$ est donc, au même titre que $e^{-\frac{t^2}{2}}$, un exemple de fonction invariante, à un coefficient près, par la transformation de Fourier.

■ 7. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{|t|}}$ est transformable au sens de Fourier et trouver sa transformée.

Intégrale semi-convergente. $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{\sqrt{|t|}}\right)=\sqrt{\dfrac{2\pi}{|x|}}$.

CHAPITRE 4

TRANSFORMATION DE LAPLACE. CALCUL SYMBOLIQUE

A. DÉFINITIONS ET GÉNÉRALITÉS

1. Introduction

La transformation de Fourier ne s'applique qu'à une catégorie restreinte de fonctions : de nombreuses fonctions usuelles, par exemple t, $\sin t$, e^t ne sont pas transformables **au sens de Fourier** du fait que l'intégrale de Fourier associée diverge en $+\infty$ ou en $-\infty$. On peut pallier cette insuffisance en ne considérant que des fonctions $f(t)$ nulles sur $]-\infty, 0[$, ce qui supprime le problème de convergence en $-\infty$, et en multipliant $f(t)$ par une exponentielle de la forme e^{-Ct}, C étant suffisamment grand pour que $\mathcal{F}(f(t)\,e^{-Ct})$ soit convergente en $+\infty$.

Par exemple $\mathcal{F}(\sin t)$ n'existe pas, mais $\mathcal{F}(e^{-Ct}\sin t)$ existe pour $C>0$, à condition de considérer la fonction nulle pour $t<0$. On obtient alors, dans le cas général, en supposant que C existe,

$$\mathcal{F}(f(t)\,e^{-Ct}) = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-(C-ix)\,t}\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{pt}\,dt$$

en posant $p = C - ix$.

On arrive ainsi à la transformation de Laplace.

2. Définitions et notations

Soit une fonction $f(t)$ d'une variable réelle t, supposée nulle pour $t<0$, et définie sur $[0, +\infty[$, éventuellement seulement $]0, +\infty[$.

p étant une variable complexe, considérons l'intégrale

$$\boxed{F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt}$$

Si cette intégrale est définie sur un domaine $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$, non vide et non réduit à un point, on dit que $f(t)$ est transformable **au sens de Laplace** et que $F(p)$ est sa transformée ou **image** de Laplace, et on écrit

$$F(p)=\mathcal{L}[f(t)] \text{ ou plus couramment } f(t)\supset F(p)$$

ce dernier symbole se lisant **a pour image.**

Les méthodes de résolution de problèmes, souvent d'origine physique, utilisant la transformation de Laplace $f(t)\supset F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt$ constituent le calcul symbolique.

Il existe une variante, qui tend à tomber actuellement en désuétude, appelée transformation de **Carson-Laplace** et conduisant au **calcul opérationnel,** définie par $f(t)\longrightarrow\int_0^{+\infty} pf(t)\,e^{-pt}\,dt$.

Dans tout ce chapitre, nous n'envisageons que la transformation de Laplace proprement dite.

3. Étude de la convergence

• Comme pour la transformée de Fourier, nous supposons f continue presque partout sur $]0, +\infty[$.

• En 0, l'intégrale de Laplace ne pose pas de problème si $f(0)$ existe, ou si $f(0^+)=\lim_{t\to 0^+} f(t)$ existe. Dans le cas contraire, du fait que $f(t)\,e^{-pt}\underset{t\to 0^+}{\sim} f(t)$, l'intégrale converge en 0 si $\int_0^1 f(t)\,dt$ existe; une condition suffisante pour cela est $|f(t)|\leqslant\frac{k}{t^\alpha}$, $\alpha>-1$, $k>0$, lorsque $t\longrightarrow 0^+$. Dans ce qui suit, nous supposons $\int_0^1 f(t)\,dt$ convergente.

• Si $p=x+iy$, x et y étant réels, une condition suffisante de convergence de l'intégrale de Laplace en $+\infty$ est la convergence absolue, soit $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-xt}\,dt$ convergente. Trois cas peuvent alors se présenter :

a) $\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt$ converge $\forall p\in\mathbb{C}$: $F(p)$ est alors définie, $\forall p$ complexe; c'est le cas par exemple pour $f(t)=e^{-t^2}$.

b) $\int_1^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt$ diverge $\forall p\in\mathbb{C}$: $f(t)$ n'est pas transformable.

c) Il existe un p_1 complexe tel que $F(p_1)$ existe : alors la fonction $\varphi_1(x)=\int_0^x f(t)\,e^{-p_1 t}\,dt$ est continue et majorée en module par un nombre A sur $[0, +\infty[$. Sa dérivée est $\varphi_1'(x)=f(x)\,e^{-p_1 x}=g(x)$.

Considérons, pour $\mathrm{Re}(p)>\mathrm{Re}(p_1)$, l'intégrale

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)\,e^{-pt}\,dt=\int_0^x f(t)\,e^{-p_1 t}\,e^{-(p-p_1)t}\,dt$$
$$=\int_0^x g(t)\,e^{-(p-p_1)t}\,dt$$

et intégrons par parties

$$\varphi(x)=[\varphi_1(t)\,e^{-(p-p_1)t}]_0^x-\int_0^x \varphi_1(t)\cdot(p_1-p)\,e^{-(p-p_1)t}\,dt$$
$$=\varphi_1(x)\,e^{-(p-p_1)x}+(p-p_1)\int_0^x \varphi_1(t)\,e^{-(p-p_1)t}\,dt$$

Quand $x \longrightarrow +\infty$, $\quad \varphi_1(x)\,e^{-(p-p_1)x} \longrightarrow 0$

et $\left|\int_0^x \varphi_1(t)\,e^{-(p-p_1)t}\,dt\right| \leqslant A\int_0^{+\infty} e^{-|\mathrm{Re}(p-p_1)|\,t}\,dt$ qui converge;

donc $\int_0^{+\infty} \varphi_1(t)\,e^{-(p-p_1)t}\,dt$ converge et $\varphi_1(+\infty)$ existe.

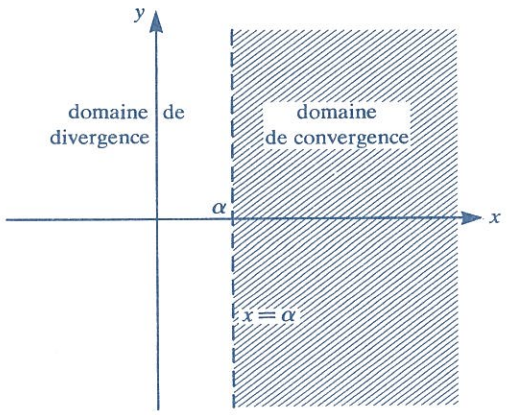
D'où le résultat fondamental : si $F(p)$ existe en un point p_1, elle existe aussi, autrement dit l'intégrale de Laplace de f est convergente, en tout point du demi-plan défini par $\mathrm{Re}(p)>\mathrm{Re}(p_1)$.

Alors, de deux choses l'une : ou l'ensemble des $\mathrm{Re}(p_1)$ tel que $F(p_1)$ existe n'est pas minoré, alors $F(p)$ est définie $\forall p$ et on retombe sur le cas (*b*); ou cet ensemble est minoré, il admet alors une borne inférieure α tel que $\mathrm{Re}(p)>\alpha \Longrightarrow F(p)$ définie; $\mathrm{Re}(p)<\alpha \Longrightarrow F(p)$ non définie. La droite $x=\alpha$ du plan complexe partage ce plan en un demi-plan de convergence absolue, $x>\alpha$, et un demi-plan de divergence, $x<\alpha$; pour $x=\alpha$ une étude directe serait nécessaire sur chaque cas d'espèce.

En fait il est rare d'avoir à donner une valeur numérique à p, et il suffit que α existe, fini ou égal à $-\infty$ (cas (*a*) ci-dessus), pour que la transformée de Laplace soit utilisable.

Le cas (*b*) correspond à $\alpha=+\infty$, f n'est alors pas transformable.

• En conclusion, à l'intégrale de Laplace d'une fonction $f(t)$ définie sur $[0, +\infty[$ (ou $]0, +\infty[$) correspond un nombre réel α, éventuellement égal à $-\infty$ ou $+\infty$, appelé **abscisse de convergence** de f, tel que $\mathcal{L}(f(t))=F(p)$ existe pour $\mathrm{Re}(p)>\alpha$, n'existe pas pour $\mathrm{Re}(p)<\alpha$.



Ce résultat est à rapprocher de celui concernant les séries entières, l'abscisse de convergence jouant ici le rôle du rayon de convergence dans une telle série.

• Notons encore que la convergence n'est pas nécessairement absolue sur le demi-plan $x>\alpha$, en revanche, on peut démontrer que la convergence de l'intégrale de Laplace est uniforme sur le demi-plan $x\geqslant\beta$, $\forall\beta>\alpha$; de plus il existe une **abscisse de convergence absolue,** $\gamma\geqslant\alpha$, qui est l'abscisse de convergence de $|f|$.

• Notons aussi une condition suffisante pour que f, continue presque partout, soit transformable au sens de Laplace : $|f(t)|\leqslant Ae^{\lambda t}$, pour $t\geqslant t_0$, A et λ étant des constantes. Il est alors évident que l'abscisse de convergence de f est au plus égale à λ.

De telles fonctions, majorables à l'infini par des exponentielles, sont dites **d'ordre exponentiel** (ou encore parfois *engineering functions* dans des ouvrages anglais ou américains).

4. Transformation inverse. Formule de Bromwich

Connaissant $F(p)$, peut-on déterminer une fonction $f(t)$ telle que $F(p)=\mathcal{L}(f(t))$? Si oui, $f(t)$ est un **original** de $F(p)$, et on écrit $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(p)]$ ou $F(p)\subset f(t)$. La détermination pratique de f sera examinée plus loin. L'existence de f et sa détermination théorique peuvent être ramenées aux mêmes problèmes concernant la transformation de Fourier puisque, si $p=C-ix$, C et x étant réels,

$$F(p)=\int^{+\infty} f(t)\,e^{-Ct}\,e^{ixt}\,dt=\varphi(x)^* \iff \varphi(x)=\mathcal{F}[f(t)\,e^{-Ct}]$$

C étant supposé fixe.

---

* Rappelons que $f(t)$ est supposée nulle pour $t<0$.

La seconde des formules de réciprocité de Fourier permet d'écrire :

$$\frac{1}{2}[f(t^+)+f(t^-)]\,e^{-Ct}=\frac{1}{2\pi}\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}\varphi(x)\,e^{-itx}\,dx \quad t>0$$

Comme $dx=-\dfrac{dp}{i}$, et comme e^{Ct} est une constante vis-à-vis de x, on obtient :

$$\frac{1}{2}[f(t^+)+f(t^-)]=\frac{1}{2i\pi}\lim_{a\to+\infty}\int_{C-ia}^{C+ia}F(p)\,e^{pt}\,dp \qquad (1)$$

pour tout réel $C>\alpha$, α étant l'abscisse de convergence de f.

Dans la plupart des cas ceci revient à écrire :

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Delta}F(p)\,e^{pt}\,dp} \qquad t\geqslant 0 \qquad (2)$$

Δ étant une parallèle à Oy, située dans le demi-plan $x>\alpha$, parcourue dans le sens des y croissants.

Cette relation (2), forme réduite de (1) en un point où f est continue et où l'intégrale du second membre converge, est appelée formule de Bromwich (ou formule d'inversion de Mellin-Fourier). Il va de soi que n'importe quelle fonction $F(p)$ n'admet pas nécessairement d'original, mais nous n'étudierons pas ce problème général. La relation (1) montre cependant que si F admet un original f, cet original est unique, sauf peut-être en des points isolés : nous dirons que deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ admettant même transformée de Laplace sont égales « presque partout », et, à cette réserve près, nous écrirons $\mathcal{L}(f(t))=\mathcal{L}(g(t)) \iff f(t)=g(t)$.

5. Premiers exemples. Fonction échelon-unité

Nous verrons plus loin les transformées de quelques fonctions usuelles. Dès maintenant cherchons les transformées de deux fonctions très importantes dans les applications :

• La fonction dite **échelon-unité** (ou **fonction de Heaviside**) définie par

$$u(t)=0 \quad \text{si} \quad t<0$$
$$u(t)=1 \quad \text{si} \quad t>0$$

La valeur pour $t=0$ peut être prise arbitrairement, cependant la plus logique d'après la théorie est $\frac{1}{2}$. Dans la pratique cette valeur n'intervient pas. On a par définition :

$$u(t) \supset \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^{+\infty}, \quad \text{si } p \neq 0$$

intégrale convergente si $\mathrm{Re}(p)>0$, alors $\lim_{t\to+\infty} e^{-pt}=0$ et

$$\boxed{u(t) \supset \frac{1}{p}}$$

l'abscisse de convergence étant $\alpha=0$.

• La fonction exponentielle $f(t)=e^{at}$, a étant donné, réel ou complexe, conduit à l'intégrale

$$e^{at} \supset \int_0^{+\infty} e^{(a-p)t}\,dt = \left[\frac{e^{(a-p)t}}{a-p}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p-a}$$

si $\mathrm{Re}(p)>\mathrm{Re}(a)$.

6. Linéarité. Applications

Comme pour la transformation de Fourier, la linéarité résulte de celle de l'intégration. Précisément, si $f(t) \supset F(p)$ et $g(t) \supset G(p)$, les abscisses de convergence étant α et β, on a $\forall \lambda, \mu$ complexes

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \supset \lambda F(p) + \mu G(p),$$

l'abscisse de convergente étant $\sup(\alpha, \beta)$.

Le lecteur en déduira facilement, par décomposition en exponentielles, les transformées suivantes :

$$\mathrm{ch}\ \alpha t \supset \frac{p}{p^2-\alpha^2} \qquad \mathrm{sh}\ \alpha t \supset \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$$

$$\cos \omega t \supset \frac{p}{p^2+\omega^2} \qquad \sin \omega t \supset \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

7. Translation sur t (formule du retard). Fonction périodique

• $f(t)$ étant supposée nulle pour $t<0$, et de transformée $F(p)$, $f(t-t_0)$ se déduit de $f(t)$, graphiquement, par translation de t_0 suivant l'axe des t (fig. 1). On a aussitôt

$$\begin{aligned} f(t-t_0) &\supset \int_{t_0}^{+\infty} f(t-t_0)\, e^{-pt}\,dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(u)\, e^{-p(u+t_0)}\,du \\ &= e^{-pt_0} \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-pu}\,du = e^{-pt_0} F(p) \end{aligned}$$

Nous retiendrons $\boxed{f(t-t_0) \supset e^{-pt_0} F(p)} \quad \forall t_0 \geqslant 0$

formule connue sous le nom de formule du retard, car elle permet d'interpréter un retard de t_0 sur l'instant d'entrée en jeu d'une fonction du temps t.

• Ainsi, en particulier, $u(t-t_0) \supset \dfrac{e^{-pt_0}}{p}$ (échelon retardé de t_0).

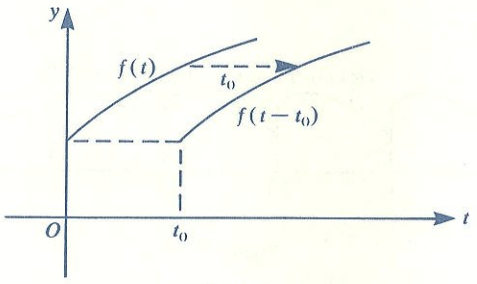


Figure 1.

• Considérons la fonction $f(t)$, T — périodique ($T>0$), définie par sa valeur $\varphi(t)$ sur $]0, T[$, la fonction $\varphi(t)$ étant supposée nulle pour $t \notin [0, T]$. $\varphi(t)$ est évidemment transformable puisque l'intégrale de Laplace correspondante est $\Phi(p) = \int_0^T \varphi(t)\, e^{-pt}\, dt = \mathcal{L}(\varphi(t))$.

Pour $t \in]T, 2T[$, $f(t) = \varphi(t-T)$, plus généralement, si $n \in \mathbb{N}$, $f(t) = \varphi(t-nT)$ pour $t \in]nT, (n+1)T[$. Comme alors $\varphi(u) = 0$ pour $u < nT$ et $u > (n+1)T$, on a

$$f(t) = \sum_0^{+\infty} \varphi(t-nT), \quad \forall t > 0 \qquad \text{(fig. 2)}$$

la convergence de cette série étant assurée puisqu'un seul terme est non nul. La linéarité de $\mathcal{L}$ permet d'écrire

$$f(t) \supset F(p) = \sum_0^{+\infty} \Phi(p)\, e^{-pnT} = \Phi(p) \sum_0^{+\infty} (e^{-pT})^n$$

sous réserve de convergence de cette série, qui n'est autre qu'une série géométrique de raison $z = e^{-pT}$.

Comme $\sum_0^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$, avec $|z|<1$,

nous aurons $$F(p) = \frac{\Phi(p)}{1-e^{-pT}}$$

si $|e^{-pT}|<1$, soit $\mathrm{Re}(pT)>0$, $\mathrm{Re}(p)>0$.

Ainsi, avec cette condition, et avec les notations ci-dessus :

$$\varphi(t) \supset \Phi(p) \Longrightarrow f(t) \supset \frac{\Phi(p)}{1-e^{-pT}}$$

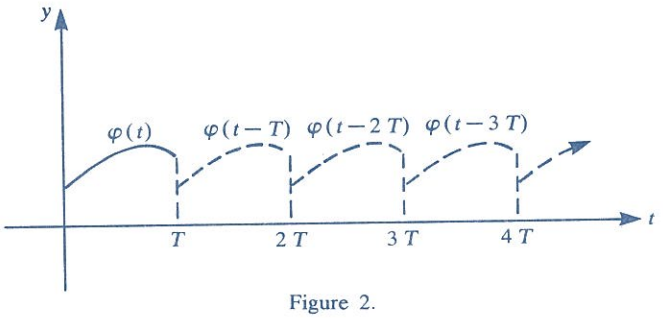


Figure 2.

Par exemple soit la fonction **en créneau** de période 2π, égale à 1 si $t \in [0, \pi[$, à -1 si $t \in [\pi, 2\pi[$, nous aurons :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant t < \pi \\ -1 & \text{si} \quad \pi \leqslant t < 2\pi \\ 0 & \text{si} \quad t \geqslant 2\pi. \end{cases}$$

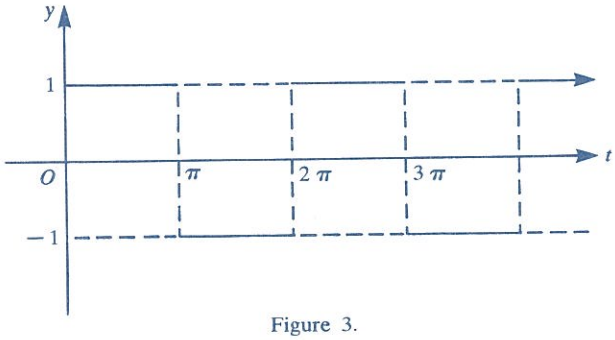


Figure 3.

Une telle fonction, constante par morceaux, ou **en escalier,** est une combinaison linéaire d'échelons-unité facile à former :

$$\varphi(t) = u(t) - 2\,u(t-\pi) + u(t-2\pi)$$

Il en résulte $\Phi(p) = \dfrac{1}{p} - 2\,\dfrac{e^{-p\pi}}{p} + \dfrac{e^{-2p\pi}}{p} = \dfrac{(1-e^{-p\pi})^2}{p}$

La formule des fonctions périodiques donne

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{1-e^{-2p\pi}} = \frac{1-e^{-p\pi}}{p(1+e^{-p\pi})}, \quad \text{soit} \quad F(p) = \frac{1}{p}\,\text{th}\,\frac{p\pi}{2}$$

8. Translation sur p

Supposons connue $F(p) \subset f(t)$, et soit p_0 une constante complexe :

$$F(p-p_0)=\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-(p-p_0)t}\, dt=\int_0^{+\infty} f(t)\cdot e^{p_0 t}\, e^{-pt}\, dt$$

sous réserve de convergence de cette intégrale, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Re}(p)>\alpha+\mathrm{Re}(p_0)$$

On voit que $\boxed{F(p)\subset f(t) \Longrightarrow F(p-p_0)\subset f(t)\, e^{p_0 t}}$

Comme la translation sur t, la translation sur p a pour effet, dans la transformée, la multiplication par une exponentielle, on voit apparaître un **semblant** de symétrie dans les rôles de t et de $-p$, que nous retrouverons par la suite.

Exemple.

De $\sin \omega t \supset \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, on déduit

$$e^{\alpha t} \sin \omega t \supset \frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$$

9. Homothétie sur t ou sur p

Un calcul immédiat, presque identique à celui fait pour la transformation de Fourier, montre que

$$\boxed{f(t)\supset F(p) \Longrightarrow f(\alpha t)\supset \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)} \qquad \forall \alpha>0$$

10. Dérivation et intégration de l'original

• Nous supposons ici que $f(0^+)=\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$ existe (nous le noterons dans tous les cas $f(0)$), que f, ainsi prolongée, est continue sur $[0, +\infty[$, et que sa dérivée f' est continue presque partout. Nous supposons aussi f et f' transformables au sens de Laplace : $f(t)\supset F(p)$, supposée connue;

$$f'(t)\supset G(p)=\int_0^{+\infty} f'(t)\, e^{-pt}\, dt$$

en intégrant par parties, on obtient :

$$G(p)=[f(t)\, e^{-pt}]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty} f(t)(-pe^{-pt})\, dt$$

f étant d'ordre exponentiel, nous pouvons prendre $\mathrm{Re}(p)$ assez grand pour que $f(t)\,e^{-pt} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient ainsi :

$$\boxed{f(t) \supset F(p) \Longrightarrow f'(t) \supset pF(p) - f(0)}$$

On voit en particulier que si $f(0)=0$, la dérivation par rapport à t équivaut, sur l'image, à une multiplication par p. C'est à partir de cette idée d'un **opérateur dérivation** symbolisé en **opérateur multiplication** qu'a été introduit le calcul symbolique, avant d'être formulé mathématiquement par l'intégrale de Laplace.

• De même, si nous supposons f' continue, et f'' continue presque partout, nous aurons :

$$f''(t) \supset p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$$

et ainsi de suite, avec des hypothèses faciles à préciser :

$$f^{(n)}(t) \supset p^n F(p) - \sum_{k=0}^{k=n-1} p^{(n-k-1)} f^{(k)}(0)$$

• $f(t)$ étant continue presque partout sur $[0, +\infty[$, soit $g(t) = \int_0^t f(u)\,du$. Si f est transformable, de transformée F, elle est d'ordre exponentiel, $|f(u)| < ke^{\lambda u}$ pour $u \geqslant t_0$ et

$$\left| \int_{t_0}^{t} f(u)\,du \right| < \int_{t_0}^{t} ke^{\lambda u}\,du < \frac{k}{\lambda} e^{\lambda t}$$

$g(t)$ est donc d'ordre exponentiel et a une transformée $G(p)$.

Mais $g'(t) = f(t)$, donc $pG(p) - g(0) = F(p)$, avec $g(0)=0$, et $G(p) = \dfrac{F(p)}{p}$.

Nous concluons $\boxed{f(t) \supset F(p) \Longrightarrow \int_0^t f(u)\,du \supset \dfrac{F(p)}{p}}$

11. Dérivation et intégration de l'image

• Soit $f(t) \supset F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,dt$

En supposant p réel, la dérivation sous le signe $\int$ sera légitime si l'intégrale obtenue $\int_0^{+\infty} f(t)(-te^{-pt})\,dt$ est uniformément convergente :

or si $f(t)$ est d'ordre exponentiel, $|f(t)|<ke^{\lambda t}$ pour $t>t_0$, et $|tf(t)|<ke^{(\lambda+1)t}$ pour $t>t_1$, cette intégrale converge donc normalement et par suite uniformément sur $[p_0, +\infty[$, $\forall p_0>\lambda+1$.

On peut donc écrire $F'(p)=\int_0^{+\infty} -tf(t)\,e^{-pt}\,dt \subset -tf(t)$.

On voit que dériver par rapport à p équivaut à multiplier par $-t$:

$$\boxed{F(p)\subset f(t) \Longrightarrow F'(p)\subset -tf(t)}$$

Cette propriété est aussi utile sous la forme

$$f(t)\supset F(p) \Longrightarrow tf(t)\supset -F'(p)$$

On en déduit, $\forall n\in\mathbb{N}$, $F^{(n)}(p)\subset(-1)^n t^n f(t)$.

• p étant toujours supposé réel, considérons la fonction

$$G(p)=\int_a^p F(u)\,du.$$

Si elle a pour original une fonction $g(t)$ d'ordre exponentiel, on aura

$G(p)=\int_0^{+\infty} g(t)\,e^{-pt}\,dt$ avec $|g(t)|<ke^{\lambda t}$ pour $t\geqslant t_0$.

Cherchons $\lim_{p\to+\infty} G(p)$

$$G(p)=\int_0^{t_0} g(t)\,e^{-pt}\,dt+\int_{t_0}^{+\infty} g(t)\,e^{-pt}\,dt$$

$$|G(p)|\leqslant\int_0^{t_0} \mu e^{-pt}\,dt+\int_{t_0}^{+\infty} ke^{(\lambda-p)t}\,dt, \text{ si } \mu=\sup|g(t)|, \text{ sur } [0, t_0]$$

$$=\frac{\mu}{p}(1-e^{-pt_0})+\frac{k}{p-\lambda}e^{(\lambda-p)t_0}, \text{ si } p>\lambda$$

on voit que $G(p)\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

Tenant compte de $G(+\infty)=0$, nous prendrons $a=+\infty$, la convergence de l'intégrale $G(p)=\int_{+\infty}^{p} F(u)\,du$ étant assurée par la majoration de $|F(u)|$ analogue à celle qui précède pour $|G(p)|$. Nous admettrons que cette condition $G(+\infty)=0$ est suffisante pour que G ait un original $g(t)$, alors $G'(p)=F(p) \Longrightarrow -tg(t)=f(t)$, $g(t)=-\frac{f(t)}{t}$, on a donc la formule :

$$\boxed{F(p)\subset f(t) \Longrightarrow \int_p^{+\infty} F(u)\,du \subset \frac{f(t)}{t}}$$

B. TRANSFORMÉES USUELLES RECHERCHE D'UN ORIGINAL

1. Fonctions se ramenant aux exponentielles ou aux polynômes

• Rappelons que

$$e^{\alpha t} \supset \frac{1}{p-\alpha} \qquad \operatorname{ch} \alpha t \supset \frac{p}{p^2-\alpha^2} \qquad \operatorname{sh} \alpha t \supset \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$$

$$\cos \omega t \supset \frac{p}{p^2+\omega^2} \qquad \sin \omega t \supset \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

$$e^{\alpha t} \cos \omega t \supset \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2} \qquad e^{\alpha t} \sin \omega t \supset \frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$$

• Par la formule de dérivation de l'image, $tf(t) \supset -F'(p)$, on déduit facilement de celles qui précèdent les formules :

$$te^{\alpha t} \supset \frac{1}{(p-\alpha)^2} \qquad t^2 e^{\alpha t} \supset \frac{2}{(p-\alpha)^3} \qquad \dots \qquad t^n e^{\alpha t} \supset \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$$

$$t \sin \omega t \supset \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2} \qquad t \cos \omega t \supset \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

En particulier, pour $\alpha = 0$ $\boxed{t^n \supset \frac{n!}{p^{n+1}}}$

2. Transformée de t^α

Quand $t \longrightarrow 0^+$, $t^\alpha e^{-pt} \sim t^\alpha$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-pt}\, dt \subset t^\alpha$ n'a de sens que si $\alpha > -1$. En supposant p réel > 0, qui est une condition suffisante de convergence de l'intégrale, le changement de variable $pt = u$ donne

$$t^\alpha \supset \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{p}\right)^\alpha e^{-u} \cdot \frac{du}{p} = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u}\, du = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1)$$

Donc

$$\forall \alpha > -1 \qquad \boxed{t^\alpha \supset \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}}$$

Pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, on retrouve $t^n \supset \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

Pour $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, on obtient $t^{-\frac{1}{2}} \supset \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot p^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi} \cdot p^{-\frac{1}{2}}$, $t^{-\frac{1}{2}}$ est donc, à un coefficient près, invariante par la transformation de Laplace.

3. Produit de convolution. Original d'un produit

$f(t)$ et $g(t)$ étant supposées nulles pour $t<0$ et intégrables sur $[0, T]$ pour tout $T>0$, le produit de convolution

$$f(t)\bigstar g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,g(t-u)\,du$$

se réduit à : $$f(t)\bigstar g(t)=\int_{0}^{t} f(u)\,g(t-u)\,du$$

C'est sous cette forme que nous le définissons en vue de la transformation de Laplace.

Supposons $f(t)\supset F(p)$, $g(t)\supset G(t)$, cherchons $\Phi(p)\subset f(t)\bigstar g(t)$, c'est-à-dire :

$$\Phi(p)=\int_{0}^{+\infty} e^{-pt}\,dt\int_{0}^{t} f(u)\,g(t-u)\,du$$

$$=\iint_{\mathbb{D}} f(u)\,g(t-u)\,e^{-pt}\,dt\,du$$

$\mathbb{D}$ étant le domaine du plan (Ot, Ou) défini par $0\leqslant u\leqslant t$ (fig. 4).

Effectuons le changement de variables $t=x+y$, $u=y$, son jacobien est $\dfrac{D(t,u)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$, le domaine Δ transformé de $\mathbb{D}$ est $0\leqslant y\leqslant x+y$, c'est-à-dire $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

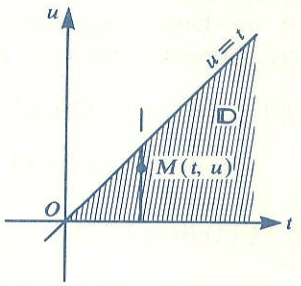


Figure 4.

C'est le premier quadrant du plan (Ox, Oy) (fig. 5), et on a

$$\Phi(p)=\iint_{\Delta} f(y)\,g(x)\,e^{-p(x+y)}\,dx\,dy$$

$$=\int_{0}^{+\infty} f(y)\,e^{-py}\,dy\int_{0}^{+\infty} g(x)\,e^{-px}\,dx$$

$$=F(p)\,G(p).$$

Comme dans la transformation de Fourier, on obtient

$$\mathcal{L}(f\star g)=\mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g) \qquad \text{ou}$$

$$\boxed{f(t)\supset F(p),\ g(t)\supset G(p) \Longrightarrow f(t)\star g(t)\supset F(p)\,G(p)}$$

Les propriétés de la convolution résultent de celles de la multiplication qui est son image par $\mathcal{L}$:

commutativité : $f\star g=g\star f$

associativité : $(f\star g)\star h=f\star(g\star h)$

distributivité par rapport à l'addition : $f\star(g+h)=f\star g+f\star h$.

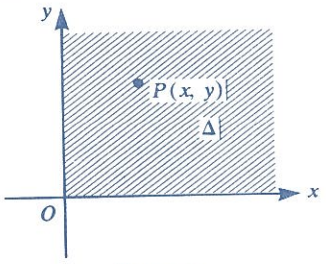


Figure 5.

4. Distribution ou « fonction » de Dirac

On rencontre fréquemment en physique des **impulsions,** par exemple des courants électriques, de durée très petite, mais d'effet énergétique non négligeable. L'interprétation mathématique d'une impulsion est une distribution, improprement appelée fonction de Dirac.

La fonction unitaire de Dirac (appelée simplement, en général, fonction de Dirac) peut être définie comme suit : ε étant un nombre positif, posons

$$f_\varepsilon(t)=0 \quad \text{si} \quad t\notin[0,\ \varepsilon]$$

$$=\frac{1}{\varepsilon} \quad \text{si} \quad t\in\,]0,\ \varepsilon[\qquad \text{(fig. 6)}$$

On a évidemment $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} f_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t=1$

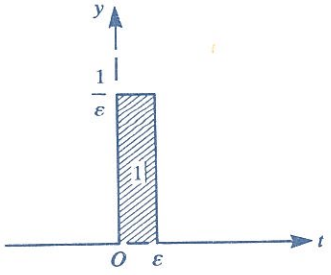


Figure 6.

La fonction de Dirac, notée $\delta(t)$, est par définition

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f_\varepsilon(t)$$

Il en existe d'autres définitions équivalentes, chacune conduisant à $\delta(t) = 0$ sauf sur $]0, \varepsilon[$, ε étant infiniment petit, et $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = 1$, ce qui implique évidemment $\delta(t)$ infiniment grande là où elle est non nulle.

Cherchons $F_\varepsilon(p) \subset f_\varepsilon(t)$. Il suffit de remarquer que

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}[u(t) - u(t-\varepsilon)] \supset \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-p\varepsilon}}{p}\right)$$

donc
$$F_\varepsilon(p) = \frac{1 - e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon}$$

Si nous posons $\mathcal{L}(\delta(t)) = \lim_{x \to 0^+} \mathcal{L}(f_\varepsilon(t)) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1-(1-p\varepsilon)}{p\varepsilon} = 1$ (développement limité suivant $p\varepsilon$ qui tend vers 0), nous obtenons

$$\boxed{\delta(t) \supset 1}$$

D'autres interprétations de $\delta(t)$, faciles à justifier, en résultent.

• Du point de vue du calcul symbolique, vu que $1 = p \cdot \frac{1}{p}$, $\delta(t)$ apparaît comme la dérivée de l'échelon-unité $u(t)$. Cette interprétation se confirme si nous définissons $u(t)$ comme $\lim_{\varepsilon \to 0^+} g_\varepsilon(t)$, avec

$$g_\varepsilon(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0$$
$$= \frac{t}{\varepsilon} \quad \text{si} \quad 0 < t < \varepsilon$$
$$= 1 \quad \text{si} \quad t > \varepsilon$$

• Comme 1, image de $\delta(t)$, est évidemment l'élément neutre dans la multiplication des images, $\delta(t)$ est l'élément neutre de la convolution, considérée comme la transformée par $\mathcal{L}^{-1}$ de la multiplication.

On a bien en effet $\delta(t) \star g(t) \supset 1 \cdot G(p) = G(p) \subset g(t)$
donc $\delta(t) \star g(t) = g(t)$, $\forall g$ transformable.

Le lecteur pourra d'ailleurs vérifier directement, sans le calcul symbolique, que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} [f_\varepsilon(t) \star g(t)] = g(t)$.

• Remarquons encore que, pour $p \longrightarrow +\infty$, $\mathcal{L}(\delta(t))$ ne tend pas vers 0, cela tient au fait que $\delta(t)$ n'est pas une fonction au sens habituel du terme.

5. Transformée d'une série entière

Supposons $f(t)=\sum_{0}^{+\infty} a_n t^n$ pour $t \geqslant 0$, cette série ayant donc un rayon de convergence infini. On a donc $f(t)=\lim_{n \to +\infty} s_n(t)$,

avec $s_n(t)=\sum_{0}^{n} a_k t^k \supset S_n(p)=\sum_{0}^{n} a_k \frac{k!}{p^{k+1}}$.

Si $S_n(p)$ admet une limite pour $n \longrightarrow +\infty$, nous admettrons que cette limite est $F(p)$, transformée de $f(t)$. Ceci suppose que la série entière obtenue en $\frac{1}{p}=z$ a un rayon de convergence non nul R, on a alors :

$$f(t)=\sum_{0}^{+\infty} a_n t^n \supset F(p)=\sum_{0}^{+\infty} a_n \frac{n!}{p^{n+1}}$$

pour $p>\frac{1}{R}$.

Du fait de la continuité de la somme de cette série entière en $z=\frac{1}{p}=0$, on retrouve la relation $\lim_{p \to +\infty} F(p)=0$.

6. Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

• Dans le cas où f est développable en série entière et où la série transformée en $z=\frac{1}{p}$ a un rayon de convergence non nul, il est immédiat de constater que :

$$pF(p)=a_0+\frac{a_1}{p}+\frac{2\,a_2}{p^2}+\ldots+\frac{n!\,a_n}{p^n}+\ldots \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} a_0=f(0).$$

Dans les autres cas, nous admettrons que ce résultat reste valable pourvu que les limites envisagées existent, à savoir :

$$\boxed{\lim_{t \to 0+} f(t)=\lim_{p \to +\infty} pF(p)}$$

(théorème de la valeur initiale)

• Supposons maintenant que $f(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} l$, limite finie, et cherchons $\lim_{p \to 0} pF(p)$; pour cela écrivons :

$$pF(p) = p\int_0^T f(t)\, e^{-pt}\, dt + \int_T^{+\infty} f(t) \cdot pe^{-pt}\, dt = I_1 + I_2.$$

Quel que soit T fixé, $\lim_{p \to 0} I_1 = 0$; $\forall \varepsilon > 0$, on peut choisir T tel que $t \geqslant T \Longrightarrow |f(t) - l| < \varepsilon$, alors

$$\int_T^{+\infty} (l-\varepsilon)\, pe^{-pt}\, dt < I_2 < \int_T^{+\infty} (l+\varepsilon)\, pe^{-pt}\, dt$$

soit, en intégrant : $(l-\varepsilon)\, e^{-pT} < I_2 < (l+\varepsilon)\, e^{-pT}$.

Quand ε et par suite T sont fixés,

$$(l-\varepsilon)\, e^{-pT} \underset{p \to 0}{\longrightarrow} l - \varepsilon$$

et

$$(l+\varepsilon)\, e^{-pT} \underset{p \to 0}{\longrightarrow} l + \varepsilon$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on peut rendre $|I_2 - l|$ arbitrairement petit, on a donc $\lim_{p \to 0} pF(p) = l$.

En conclusion, si l'abscisse de convergence de f est au plus égale à 0 et si les limites envisagées existent, on a

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p)}$$

(théorème de la valeur finale)

Ces deux théorèmes permettent souvent, dans les applications, de lever des indéterminations sur des constantes (voir exercices).

7. Recherche d'un original

Nous verrons que le calcul symbolique conduit couramment à la détermination d'une fonction $f(t)$ par sa transformée de Laplace $F(p)$. Il faut alors savoir trouver $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$, original de F.

Plusieurs méthodes peuvent être envisagées.

a) La plus générale consiste à écrire $f(t)$ sous forme d'intégrale, par la formule de Bromwich, mais cette intégrale est rarement calculable explicitement.

b) Si l'on dispose d'un **dictionnaire d'images** détaillé (par exemple celui de huit pages figurant dans le volume *Formules et tables de mathématiques* de Murray R. Spiegel, Éd. McGraw-Hill) : on a des chances d'y trouver la fonction cherchée, à des adaptations de notations près.

c) En disposant seulement de quelques transformées usuelles vues plus haut, et des formules générales (translation, dérivation, convolution...), on obtient un grand nombre de transformées directes ou inverses.

d) Si la fonction $F(p)$ est une fonction rationnelle sans partie entière, sa décomposition en éléments simples, sur $\mathbb{R}$ si les pôles complexes sont simples, sur $\mathbb{C}$ si les pôles complexes sont multiples, donne $f(t)$, car

$$\frac{1}{(p-\alpha)^n} \subset \frac{1}{(n-1)!}\, t^{n-1}\, e^{\alpha t}$$

$$\frac{ap+b}{(p-\alpha)^2+\omega^2} = \frac{a(p-\alpha)+a\alpha+b}{(p-\alpha)^2+\omega^2} \subset e^{\alpha t}\left(a\cos \omega t + \frac{a\alpha+b}{\omega}\sin \omega t\right)$$

Si la fraction $F(p)$ possède une partie entière constante, on l'isole, son original est $k\delta(t)$ et on est ramené au problème précédent.

Une partie entière non constante n'a pas de transformée inverse.

e) Si $F(p)$ admet un développement en série entière en $\frac{1}{p}$, son original $f(t)$ est connu sous forme de série entière : plus précisément, dans le cas usuel où

$$F(p) = \sum_{1}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n}, \quad \text{avec} \quad R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| > 0$$

$$f(t) = \sum_{1}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-1)!}\, t^{n-1}$$

avec rayon de convergence

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{(n-1)!}\cdot\frac{n!}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(n\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\right) = +\infty$$

L'original $f(t)$ est donc connu sur $[0, +\infty[$.

D'autres séries, par exemple des séries entières en $e^{-\alpha p}$ peuvent aussi être utiles.

C. APPLICATIONS DU CALCUL SYMBOLIQUE

1. Résolution d'équations fonctionnelles

Pour des équations fonctionnelles autres que différentielles, l'utilisation de la transformation de Laplace est analogue à celle de la transformation de Fourier. Soit par exemple à déterminer $f(t)$, nulle pour $t<0$, telle que

$$f(t)-f(t-1)=t \tag{3}$$

La transformée de (3) est $F(p)-e^{-p}F(p)=\dfrac{1}{p^2}$

d'où $F(p)=\dfrac{1}{p^2(1-e^{-p})}=\dfrac{1}{p^2}\sum_{0}^{+\infty} e^{-np}$ avec $p>0$.

Or $$\frac{1}{p^2}e^{-np} \subset (t-n)\,u(t-n)=\varphi_n(t)$$

où le coefficient $u(t-n)$ précise que $\varphi_n(t)$ est nulle pour $t<n$.

Donc $$f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(t-n)\,u(t-n)$$

C'est une fonction représentée par une ligne brisée continue présentant une rupture de pente en chaque point d'abscisse entière $t=n$: pour $t\in[n,\ n+1]$,

$$f(t)=\sum_{k=0}^{k=n}(t-k)=(n+1)\,t-\sum_{1}^{n}k=(n+1)\,t-\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=(n+1)\left(t-\frac{n}{2}\right)$$

Un exercice à la suite de ce chapitre propose la résolution d'une équation intégrale.

2. Équations et systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Le calcul symbolique est utilisable lorsque les seconds membres éventuels sont transformables au sens de Laplace, et surtout intéressant lorsque des conditions initiales sont imposées aux fonctions inconnues.

Exemple.

Résoudre $y''+\omega^2 y=\sin \omega t$, $t\geqslant 0$, avec $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.

En posant $y(t)\supset Y(p)$, on a $y'\supset pY-1$, $y''\supset p^2Y-p+1$, d'où

l'équation $(p^2+\omega^2)\,Y = p-1+\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

$$Y = \frac{p-1}{p^2+\omega^2} + \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2} = Y_1 + Y_2$$

$$Y_1 \subset \cos \omega t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t$$

Pour avoir $y_2 \supset Y_2$, on peut décomposer Y_2 sur $\mathbb{C}$, ou remarquer que

$$\cos \omega t \supset \frac{p}{p^2+\omega^2} \Longrightarrow t \cos \omega t \supset -\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right)' = \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$$

$$= \frac{1}{p^2+\omega^2} - \frac{2\,\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$$

$$= -2\,\omega Y_2 + \mathcal{L}\left(\frac{\sin \omega t}{\omega}\right)$$

d'où $$Y_2 \subset -\frac{t}{2\,\omega} \cos \omega t + \frac{\sin \omega t}{2\,\omega^2}$$

et $$Y \subset y = \left(1 - \frac{t}{2\,\omega}\right) \cos \omega t + \frac{1-2\,\omega}{2\,\omega^2} \sin \omega t$$

Remarquons que ce calcul n'est, en principe, valable que pour $t \geqslant 0$, mais il va de soi que la solution ci-dessus convient quel que soit t.

• Cas général : soit à résoudre l'équation

$$a_0\, y^{(n)} + a_1\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\, y' + a_n\, y = f(t) \qquad (4)$$

où $f(t) \supset F(p)$, et où on donne :

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$$

Si $y(t) \supset Y(p)$,

$$(4) \supset (a_0\, p^n + a_1\, p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, p + a_n)\, Y = F(p) + B(p)$$

$A(p) = a_0\, p^n + a_1\, p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, p + a_n$ est le polynôme caractéristique de (4), $B(p)$ est un polynôme de degré $\leqslant n-1$ dont les coefficients sont liés aux $y_0^{(k)}$.

D'où $$Y(p) = \frac{F(p) + B(p)}{A(p)}$$

On est ramené à chercher l'original de cette fonction. $\dfrac{B(p)}{A(p)}$ étant une fonction rationnelle sans partie entière, il faut connaître ses pôles pour poursuivre le calcul. Le plus souvent $F(p)$ est aussi une fraction rationnelle.

3. Équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des polynômes

Une telle équation aura pour premier membre une somme de termes de la forme $t^k y^{(m)}(t)$, et pour second membre une fonction donnée que nous supposons transformable. Si $y(t) \supset Y(p)$, $y'(t) \supset pY - y_0$, ..., $y^{(m)}(t) \supset p^m Y - \sum_{h=0}^{h=m-1} p^{m-h-1} y_0^{(h)}$.

$$t^k y^{(m)}(t) \supset (-1)^k \frac{d^k}{dp^k}\left[p^m Y - \sum_{h=0}^{h=m-1} p^{m-h-1} y_0^{(h)}\right]$$

$$= \sum_{q=0}^{q=k} A_q(p)\, Y^{(q)} - B(p)$$

où $B(p)$ est un polynôme de degré $m-k-1$, et où les $A_q(p)$ sont des polynômes de degré au plus égal à m. On constate ainsi qu'une équation différentielle linéaire d'ordre n, où les coefficients sont des polynômes de degré maximum s, a pour transformée de Laplace une équation différentielle linéaire d'ordre s, où les coefficients sont des polynômes de degré maximum n. Il y a donc abaissement d'ordre lorsque $n > s$. Mais on ne peut obtenir ainsi que les solutions de l'équation transformable au sens de Laplace, et pas la solution générale puisque Y ne peut dépendre de s paramètre.

Exemple.

Cherchons la solution $y(t)$, telle que $y(0)=1$ et $y'(0)=0$, de l'équation

$$ty'' + y' + ty = 0 \tag{5}$$

On a $y \supset Y$, $ty \supset -Y'$, $y' \supset pY - 1$,

$y'' \supset p^2 Y - p$, $ty'' \supset -2pY - p^2 Y' + 1$

$$(5) \supset (p^2+1)Y' + pY = 0 \tag{6}$$

dont la résolution est immédiate : sa solution générale est $Y = \lambda (p^2+1)^{-\frac{1}{2}}$.

Pour lever l'indétermination sur λ, utilisons le théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \to 0+} y(t) = 1 = \lim_{p \to +\infty} \lambda p (p^2+1)^{-\frac{1}{2}} = \lambda, \quad \text{donc} \quad Y = (p^2+1)^{-\frac{1}{2}}$$

Pour obtenir $y(t)$, développons Y en série entière par rapport à $\frac{1}{p}$, ce qui suppose $p > 1$:

$$Y = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{p^5} - \ldots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)} \cdot \frac{1}{p^{2n+1}} + \ldots$$

D'où

$$y=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}\,t^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{4!}\,t^4-\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{1}{(2n)!}\,t^{2n}+\ldots$$

soit $y=\sum_0^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$, de rayon de convergence infini.

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et est un cas particulier des fonctions de Bessel — c'est, précisément, $J_0(t)$ — qui font l'objet du prochain chapitre.

On peut observer que

$$J_0(t)\supset\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\Longrightarrow J_0(t)\star J_0(t)\supset\frac{1}{p^2+1}\subset\sin t$$

donc $$J_0(t)\star J_0(t)=\sin t$$

Résumé du chapitre 4

• $f(t)$ étant une fonction nulle pour $t<0$, définie pour $t>0$, on appelle **transformée de Laplace** de $f(t)$ la fonction éventuellement définie par

$$F(p)=\int_0^{+\infty}f(t)\,e^{-pt}\,dt$$

Notations : $F(p)=\mathcal{L}(f(t))$ ou $f(t)\supset F(p)$

$F(p)$ est définie si $\int_0^1 f(t)\,dt$ existe et si $\mathrm{Re}(p)>\alpha$, α étant fini ou égal à $-\infty$; l'intégrale $F(p)$ diverge si $\mathrm{Re}(p)<\alpha$; α est l'abscisse de convergence associée à f.

• Pour que f soit transformable, il suffit que f soit d'ordre exponentiel, c'est-à-dire que $|f(t)|\leqslant Ae^{\lambda t}$ pour $t\geqslant t_0$.

• $F(p)$ étant donnée, on peut définir son original $f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(p))$ par

$$f(t)=\frac{1}{2i\pi}\int_\Delta F(p)\,e^{pt}\,dp \qquad \textbf{(formule de Bromwich)}$$

Δ étant une parallèle à Oy d'abscisse $>\alpha$.

• **La transformation de Laplace est linéaire.**

• **Translation sur t (formule du retard).**

$$f(t)\supset F(p)\Longrightarrow f(t-t_0)\supset e^{-pt_0}F(p)\qquad t_0\geqslant0$$

• **Transformée de $f(t)$,** T-périodique, égale à $\varphi(t)$ sur $[0, T]$, φ étant supposée nulle quand $t \notin [0, \pi]$.

$$\varphi(t) \supset \Phi(p) \Longrightarrow f(t) \supset F(p) = \frac{\Phi(p)}{1 - e^{-pT}}$$

• **Translation sur p.**

$$F(p) \subset f(t) \Longrightarrow F(p - p_0) \subset e^{p_0 t} f(t)$$

• **Homothétie.**

$$f(t) \supset F(p) \Longrightarrow f(\alpha t) \supset \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \quad (\alpha > 0)$$

• **Dérivation et intégration de l'original.**

$$f(t) \supset F(p) \Longrightarrow f'(t) \supset pF(p) - f(0)$$

$$\int_0^t f(u)\,du \supset \frac{F(p)}{p}$$

• **Dérivation et intégration de l'image.**

$$F(p) \subset f(t) \Longrightarrow F'(p) \subset -tf(t)$$

$$\int_p^{+\infty} F(u)\,du \subset \frac{f(t)}{t}$$

• **Transformées usuelles.**

Échelon-unité $u(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t > 0 \end{cases}$: $u(t) \supset \frac{1}{p}$

$$e^{\alpha t} \supset \frac{1}{p - \alpha} \qquad \operatorname{ch} \alpha t \supset \frac{p}{p^2 - \alpha^2} \qquad \operatorname{sh} \alpha t \supset \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$$

$$\cos \omega t \supset \frac{p}{p^2 + \omega^2} \qquad \sin \omega t \supset \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$t^n \supset \frac{n!}{p^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}; \qquad t^\alpha \supset \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}} \quad \alpha > -1$$

$$t^n e^{\alpha t} \supset \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}$$

$\delta(t) \supset 1$, avec $\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[u(t) - u(t - \varepsilon)]$ **(fonction de Dirac).**

• **Original d'un produit.**

$$F(p)\subset f(t),\quad G(p)\subset g(t) \Longrightarrow F(p)\,G(p)\subset f(t)\star g(t) = \int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du$$

produit de convolution de $f(t)$ et $g(t)$.

• **Transformée d'une série entière.**

$$\sum_0^{+\infty} a_n t^n \supset \sum_0^{+\infty} a_n \frac{n!}{p^{n+1}}$$

si la série en t a un rayon de convergence infini, et la série en $\frac{1}{p}$ un rayon de convergence non nul.

• **Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale.**

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to +\infty} pF(p)$$

$$\lim_{t\to +\infty} f(t) = \lim_{p\to 0^+} pF(p)$$

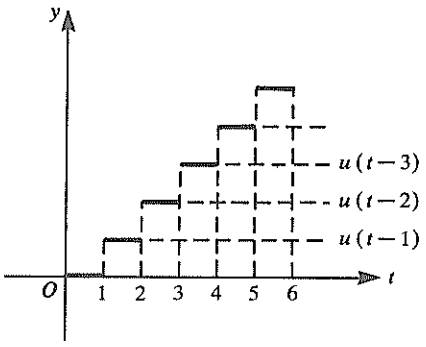
si les limites envisagées existent.

• **Recherche d'un original et applications de la transformation de Laplace.**
Voir cours détaillé et exercices.

EXERCICES

■ **1.** Trouver la transformée de Laplace de la fonction $E(t)$ (partie entière de t), définie comme le plus grand entier inférieur ou égal à t.

$E(t)=0$ si $0\leqslant t<1$
$=1$ si $1\leqslant t<2$
$=n$ si $n\leqslant t<n+1 \quad n\in\mathbb{N}$.



Il en résulte $E(t)=u(t-1)+u(t-2)+\ldots+u(t-n)+\ldots=\sum_{1}^{+\infty} u(t-n)$, $\mathcal{L}(E(t))=\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{p}e^{-pn}$, d'après $u(t)\supset\frac{1}{p}$ et la formule du retard. Dans $u(t)\supset\frac{1}{p}$, l'abscisse de convergence est 0, et pour $\mathrm{Re}(p)>0$. $|e^{-p}|<1$, la série $\sum_{1}^{+\infty}(e^{-p})^n$ converge et a pour somme $\frac{e^{-p}}{1-e^{-p}}=\frac{1}{e^p-1}$, donc $\mathcal{L}(E(t))=\frac{1}{p(e^p-1)}$, avec $\mathrm{Re}(p)>0$

■ **2.** Démontrer par la formule de Bromwich la relation $\frac{1}{p}\subset u(t)$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\Delta}\frac{1}{p}e^{tp}\,dp=f(t)$$

Δ étant une parallèle à Oy d'abscisse supérieure à α, abscisse de convergence de $\mathcal{L}(f(t))$, qui n'est pas connue ici *a priori*.

Soit $x=a$ l'équation de Δ, on a $p=a+iy$

$$f(t)=\frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a+iy}e^{at}e^{ity}\cdot i\,dy=\frac{e^{at}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ity}}{a+iy}dy$$
$$=\frac{e^{at}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a-iy}{a^2+y^2}e^{ity}\,dy$$
$$=\frac{ae^{at}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ity}}{a^2+y^2}dy-i\frac{e^{at}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ye^{ity}}{a^2+y^2}dy$$

Ces deux intégrales convergent $\forall a\neq 0$, et d'après la théorie générale leurs valeurs sont indépendantes de a; prenons par exemple $a=1$, on obtient

les intégrales de Fourier $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ity}}{1+y^2}\,dy$, $I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ye^{ity}}{1+y^2}\,dy$ qui se calculent par la méthode des résidus, le seul pôle à considérer étant i :

$I_1=2i\pi\left[\frac{e^{ity}}{2y}\right]_{y=i}=\pi e^{-t}$, $I_2=2i\pi\left[\frac{ye^{iy}}{2y}\right]_{y=i}=i\pi e^{-t}$

d'où $f(t)=\frac{e^t}{2\pi}(\pi e^{-t}+\pi e^{-t})=1$, soit $f(t)=u(t)$ pour $t>0$.

On voit que la condition $a>\alpha=0$ n'apparaît pas ici comme nécessaire pour la validité du calcul de $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right)$, cependant elle l'est pour que les deux formules de passage de f à $\mathcal{L}(f)$, et de F à $\mathcal{L}^{-1}(F)$, soient simultanément valables.

■ **3.** Déterminer $\mathcal{L}(|\sin t|)$.

$f(t)=|\sin t|$ est π-périodique, et sa restriction à $[0,\pi]$, supposée nulle en dehors de cet intervalle, peut s'écrire

$$\varphi(t)=u(t)\sin t+u(t-\pi)\sin(t-\pi),$$

le second terme neutralisant le premier à partir de $t=\pi$ (fig. 1).

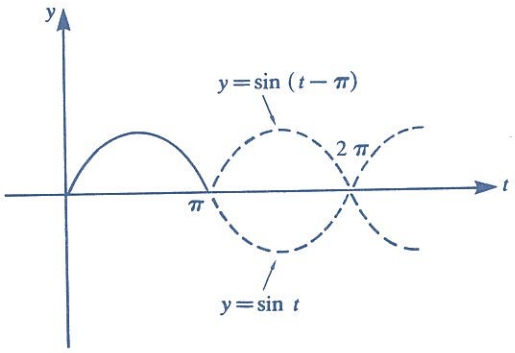


Figure 1.

On a donc, tenant compte de $\sin t \supset \frac{1}{p^2+1}$ et de la formule du retard :

$$\varphi(t)\supset\Phi(p)=\frac{1}{p^2+1}+\frac{e^{-p\pi}}{p^2+1}$$

Donc, d'après la formule des fonctions périodiques :

$$f(t)\supset F(p)=\frac{\Phi(p)}{1-e^{-p\pi}}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1+e^{-p\pi}}{1-e^{-p\pi}}$$

$$|\sin t|\supset\frac{1}{p^2+1}\coth\frac{p\pi}{2}$$

■ **4.** Soit la fonction $f(t)$, 2π-périodique, égale à 1 sur $[0, \pi[$ et à -1 sur $[\pi, 2\pi[$.

a) Établir son développement en série de Fourier.

b) On rappelle (voir paragraphe A. 7) que $f(t) \supset \frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{p\pi}{2}$. Donner une autre expression de $F(p)$, et retrouver ainsi la valeur de $\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

c) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 4y = f(t)$, avec les conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, en exprimant la solution de deux manières : sous forme de série de Fourier, et sous forme d'intégrale; expliciter la solution pour $t \in [0, 2\pi]$.

---

a) $f(t) = \sum_{1}^{+\infty} b_n \sin nt$ avec $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt = \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n]$

d'où

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)\, t}{2n+1}$$

Cette série n'est pas uniformément convergente sur $[0, 2\pi]$, ce qui s'explique par les discontinuités.

b) Le terme général $u_n(t) = \frac{\sin(2n+1)\, t}{2n+1}$ a pour transformée, pour $p > 0$, $U_n(p) = \frac{1}{p^2 + (2n+1)^2}$ et la série $\sum_{0}^{+\infty} U_n(p)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, sa somme est donc une fonction continue (puisque $U_n(p)$ est continue).

On a donc

$$\frac{1}{p} \operatorname{th} p\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{p^2 + (2n+1)^2} = F(p)$$

Quand $p \longrightarrow 0$, $\operatorname{th} p\frac{\pi}{2} \sim p\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{p} \operatorname{th} p\frac{\pi}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$, et on obtient

$$\sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} = \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{3}{4} \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

on retrouve la relation classique $\sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Notons aussi que le changement de variable $p\frac{\pi}{2}=x$ donne un développement de th x en série de fractions rationnelles, généralisation pour une telle fonction d'une décomposition en éléments simples :

$$\text{th } x=8\,x\sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{4\,x^2+(2\,n+1)^2\,\pi^2}$$

c) 1re méthode.

$$y''+4\,y=\frac{4}{\pi}\sum_{0}^{+\infty}\frac{\sin(2\,n+1)\,t}{2\,n+1}=\sum_{0}^{+\infty}u_n(t) \qquad (1)$$

La solution générale de l'équation sans second membre est $y=\lambda\sin 2\,t+\mu\cos 2\,t$. Celle de (1) s'obtient en ajoutant $\sum_{0}^{+\infty}y_n(t)$, sous réserve de convergence, $y_n(t)$ étant une solution particulière de

$$y''+4\,y=\frac{4}{\pi}\frac{\sin(2\,n+1)\,t}{2\,n+1},$$

que nous prenons de la forme $y_n=a\sin(2\,n+1)\,t$

d'où $4\,a-(2\,n+1)^2\,a=\frac{4}{\pi(2\,n+1)}$, $\quad a=\frac{4}{\pi(2\,n+1)(2\,n-1)(2\,n+3)}$

et $y=\lambda\sin 2\,t+\mu\cos 2\,t+\frac{4}{\pi}\sum_{0}^{+\infty}\frac{\sin(2\,n+1)\,t}{(2\,n+1)(2\,n-1)(2\,n+3)}$

(série absolument convergente).

Déterminons λ et μ pour $y(0)=0$, $y'(0)=0$

$$y'(t)=2\,\lambda\cos 2\,t-2\,\mu\sin 2\,t+\frac{4}{\pi}\sum_{0}^{+\infty}\frac{\cos(2\,n+1)\,t}{(2\,n-1)(2\,n+3)}$$

Il faut donc :

$\mu=0$

$$\lambda=-\frac{2}{\pi}\sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{(2\,n-1)(2\,n+3)}=-\frac{1}{2\,\pi}\sum_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\,n-1}-\frac{1}{2\,n+3}\right)$$

On constate que dans cette somme tous les termes s'éliminent deux à deux, donc $\lambda=0$, et la solution demandée est

$$y=\frac{4}{\pi}\sum_{0}^{+\infty}\frac{\sin(2\,n+1)\,t}{(2\,n-1)(2\,n+1)(2\,n+3)} \qquad (2)$$

fonction continue sur $\mathbb{R}$, $2\,\pi$-périodique, impaire.

2e méthode.

Transformons l'équation $y''+4y=f(t)$ par la transformation de Laplace $y(t)\supset Y(p)$; $y'(t)\supset pY'(p)-y(0)$ soit $y'\supset pY$; $y''(t)\supset p^2Y(p)-y'(0)$ soit $y''\supset p^2Y$.

On obtient l'équation $(p^2+4)\,Y=F(p)=\dfrac{1}{p}\,\text{th}\,\dfrac{p\pi}{2}$

Donc $$Y=\frac{1}{p(p^2+4)}\,\text{th}\,\frac{p\pi}{2}=F(p)\cdot\frac{1}{p^2+4}$$

On en déduit, puisque $\dfrac{1}{p^2+4}\subset\dfrac{1}{2}\sin 2t$

$$y=f(t)\star\frac{1}{2}\sin 2t=\frac{1}{2}\int_0^t f(u)\sin 2(t-u)\,du \tag{3}$$

Il s'agit de la même fonction que dans (2). Elle est bien 2π-périodique, on peut le vérifier en constatant que

$$\int_t^{t+2\pi} f(u)\sin 2(t-u)\,du=0$$

Il suffit de la connaître sur $[0, 2\pi]$.

Pour $0\leqslant t\leqslant\pi$, $$y=\frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-u)\,du$$

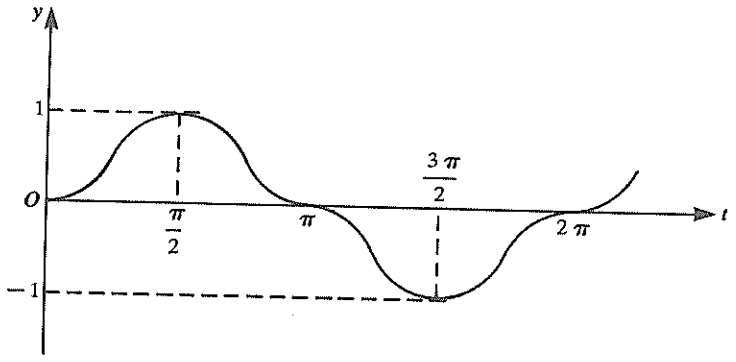
$$=\frac{1}{4}\Big[\cos 2(t-u)\Big]_{u=0}^{u=t}=\frac{1}{4}(1-\cos 2t)=\frac{1}{2}\sin^2 t$$

Pour $\pi\leqslant t\leqslant 2\pi$ $$y=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2(t-u)\,du-\frac{1}{2}\int_{\pi}^{t}\sin 2(t-u)\,du$$

$$=\frac{1}{4}[\cos 2(t-u)]_0^{\pi}-\frac{1}{4}[\cos 2(t-u)]_{\pi}^{t}$$

$$=-\frac{1}{4}(1-\cos 2t)=-\frac{1}{2}\sin^2 t$$

Le graphe de y a donc l'allure ci-dessous.



Remarquons que la résolution de l'équation $y''+4y=1$, pour $t\in[0,\pi[$, est immédiate sans la transformation de Laplace et donne

$$y=\lambda\cos 2t+\mu\sin 2t+\frac{1}{4}$$

C'est l'incorporation à l'équation des conditions initiales et des discontinuités sur f qui fait l'intérêt de la méthode précédente.

■ **5.** Déterminer $\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right)$ et $\mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right)$. Retrouver ainsi la valeur de l'intégrale $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du$.

Nous savons que $f(t)\supset F(p) \Longrightarrow \frac{f(t)}{t}\supset\int_p^{+\infty} F(u)\,du$.

Donc $\sin t\supset\frac{1}{p^2+1}$, avec l'abscisse de convergence 0, entraîne $\frac{\sin t}{t}\supset\int_p^{+\infty}\frac{du}{u^2+1}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arc\,tg}\,p=\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{p}$, puisque $p>0$.

La formule d'intégration de l'original $\int_0^t f(u)\,du\supset\frac{F(p)}{p}$ donne à son tour $\int_0^t\frac{\sin u}{u}\,du\supset\frac{1}{p}\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{p}$.

Cette fonction est le sinus intégral de t, noté Si t. La valeur de I est fournie par le théorème de la valeur finale, $\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{p\to 0^+} pF(p)$, qui s'applique ici sans difficulté puisque l'intégrale I est convergente :

$$I=\lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{\sin u}{u}\,du=\lim_{p\to 0+}\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{p}=\frac{\pi}{2}$$

on retrouve la formule connue $\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du=\frac{\pi}{2}$

■ **6.** En partant de $\frac{1}{\sqrt{t}}\supset\sqrt{\frac{\pi}{p}}$ (vue dans le cours), où on suppose $p>0$, trouver les transformées de $\frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{t}}$, $\frac{\cos t}{\sqrt{t}}$, $\frac{\sin t}{\sqrt{t}}$, et les valeurs de $\int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx$ et $\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx$.

$\frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{t}}\supset\sqrt{\frac{\pi}{p-\alpha}}$ (translation sur p)

$\frac{\cos t}{\sqrt{t}}=\frac{1}{2\sqrt{t}}(e^{it}+e^{-it})\supset\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{p-i}}+\frac{1}{\sqrt{p+i}}\right)=F(p)$

p étant réel positif, $\dfrac{1}{\sqrt{p+i}}=(p+i)^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}\operatorname{Log}(p+i)}$ est défini,

et $\operatorname{Log}(p+i)=\operatorname{Log}|p+i|+i\operatorname{Arg}(p+i)=\dfrac{1}{2}\operatorname{Log}(p^2+1)+i\operatorname{Arc\,tg}\dfrac{1}{p}$

donc $(p+i)^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Log}(p^2+1)-\frac{i}{2}\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{p}}$

$(p-i)^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{4}\operatorname{Log}(p^2+1)+\frac{i}{2}\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{p}}$,

$$F(p)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}(p^2+1)^{-\frac{1}{4}}\cdot 2\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{p}\right)$$

On est amené à calculer $\cos\theta$, $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$, sachant que $\operatorname{tg}2\theta=\dfrac{1}{p}$

on a $$\cos\theta=\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\theta}}}$$

soit $$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}(p^2+1)^{-\frac{1}{4}}(p+\sqrt{p^2+1})^{\frac{1}{2}}$$

donc $$\mathcal{L}\left(\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{p+\sqrt{p^2+1}}{p^2+1}}$$

La même méthode que dans l'exercice 5 donne $\mathcal{L}\left(\displaystyle\int_0^t\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,du\right)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,du=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, et par $u=x^2$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos x^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

On trouvera de même $\mathcal{L}\left(\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2+1}-p}{p^2+1}}$,

$\displaystyle\int^{+\infty}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

■ **7.** Soit $f(t)$ définie sur $[0,+\infty[$ et admettant une transformée de Laplace $F(p)$. On pose $f_0(t)=f(t)$ et $f_n(t)=\displaystyle\int_0^t f_{n-1}(u)\,du$ pour n entier $\geqslant 1$.

Établir les relations :

$$\mathcal{L}\left(\sum_1^{+\infty}f_n(t)\,e^{-t}\right)=\frac{1}{p}\mathcal{L}(e^{-t}f(t))\quad(p>1)$$

$$\sum_1^{+\infty}f_n(t)=e^t\int_0^t e^{-u}f(u)\,du \tag{1}$$

Que donne la relation (1) dans les deux cas suivants : $f(t)=1$, $f(t)=e^t$? On justifiera dans les deux cas la convergence de la série de terme général $f_n(t)$.

On a $f(t) \supset F(p)$, $f_1(t) = \int_0^t f(u)\,du \supset F_1(p) = \frac{F(p)}{p}$...

$$f_n(t) = \int_0^t f_{n-1}(u)\,du \supset F_n(p) = \frac{F_{n-1}(p)}{p} = \frac{F_{n-2}(p)}{p^2} = \ldots = \frac{F(p)}{p^n}$$

$$\text{Donc } \mathcal{L}\left(\sum_1^n f_k(t)\right) = \sum_1^n F_k(p) = F(p) \sum_1^n \frac{1}{p^k} = \frac{F(p)}{p} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{p}\right)^n}{1-\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{F(p)}{p-1}\left(1 - \frac{1}{p^n}\right)$$

Si $p > 1$, $\frac{1}{p^n} \longrightarrow 0$ pour $n \longrightarrow +\infty$, et $\mathcal{L}\left(\sum_1^{+\infty} f_n(t)\right) = \frac{F(p)}{p-1}$.

Il en résulte $\mathcal{L}\left(e^{-t} \sum_1^{+\infty} f_n(t)\right) = = \frac{F(p+1)}{p}$ (translation sur p)

$$= \frac{1}{p}\,\mathcal{L}(e^{-t} f(t))$$

$$= \mathcal{L}\left(\int_0^t e^{-u} f(u)\,du\right)$$

et $$e^{-t} \sum_1^{+\infty} f_n(t) = \int_0^t e^{-u} f(u)\,du$$

d'où enfin $$\sum_1^{+\infty} f_n(t) = e^t \int_0^t e^{-u} f(u)\,du \qquad (1)$$

Étudions les deux cas particuliers :

• $f(t) = 1$; $f_1(t) = \int_0^t du = t$, $f_2(t) = \int_0^t u\,du = \frac{t^2}{2}$, ... et par une récurrence immédiate $f_n(t) = \frac{t^n}{n!}$

$\sum_1^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_1^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$ existe quel que soit t et vaut $e^t - 1$, le second membre de (1) vaut $e^t \int_0^t e^{-u}\,du = e^t(1 - e^{-t}) = e^t - 1$, la formule se vérifie.

• $f(t)=e^t$; $f_1(t)=\int_0^t e^u\,du=e^t-1$;

$$f_2(t)=\int_0^t (e^u-1)\,du=e^t-t-1;$$

$$f_3(t)=\int_0^t (e^u-u-1)\,du=\left[e^u-\frac{u^2}{2}-u\right]_0^t=e^t-\frac{t^2}{2}-t-1$$

Là encore une récurrence très simple donne :

$$f_n(t)=e^t-\sum_0^{n=1}\frac{t^k}{k!}=\sum_n^{+\infty}\frac{t^k}{k!}$$

La convergence de cette série peut se justifier en remarquant que

$$0\leqslant f_n(t)\leqslant\frac{t^n}{n!}\left(1+\frac{t}{n}+\frac{t^2}{n^2}+\ldots+\frac{t^q}{n^q}+\ldots\right)=\frac{t^n}{n!}\cdot\frac{n}{n-t}$$

pourvu que $n>t$, soit $0\leqslant f_n(t)<2\,\frac{t^n}{n!}$ dès que $n>2\,t$.

La formule (1) donne alors

$$\sum_1^{+\infty}\left(\sum_n^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\right)=te^t$$

■ **8.** Résoudre l'équation différentielle $y''+2\,y'+2\,y=2\,\delta(t)$, $(t\geqslant 0)$ avec les conditions initiales $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

On obtient l'équation transformée $p^2\,Y-p+2\,(pY-1)+2\,Y=2$

d'où $$Y=\frac{p+4}{p^2+2\,p+2}=\frac{p+1}{(p+1)^2+1}+\frac{3}{(p+1)^2+1}$$

et $$y=e^{-t}(\cos t+3\sin t)$$

On voit que Y et y sont les mêmes que si l'on était parti de $y''+2\,y'+2\,y=0$, avec $y(0)=1$ et $y'(0)=2$. L'adjonction d'une impulsion $k\delta(t)$ dans le second membre équivaut, pour une équation linéaire à coefficients constants, à ajouter k à la valeur initiale de y'.

■ **9.** On pose $f_\varepsilon(t)=0$ si $t\in[0,\,2\,\varepsilon]$ $(\varepsilon>0)$

$$f_\varepsilon(t)=\frac{t}{\varepsilon^2}\quad\text{si}\quad t\in[0,\,\varepsilon]$$

$$f_\varepsilon(t)=\frac{2\,\varepsilon-t}{\varepsilon^2}\quad\text{si}\quad t\in[\varepsilon,\,2\,\varepsilon]$$

$g_\varepsilon(t)=f'_\varepsilon(t)$ (là où cette dérivée est définie).

a) Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(t)=\delta(t)$

b) On pose $\delta_1(t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} g_\varepsilon(t)$

Exprimer $\mathcal{L}(\delta_1(t))$ de deux manières : comme limite de $\mathcal{L}(g_\varepsilon(t))$ et en posant *a priori* $\delta_1(t) = \delta'(t)$. Comparer les résultats, et indiquer une généralisation.

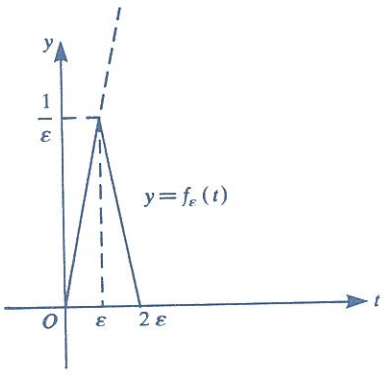


Figure 2.

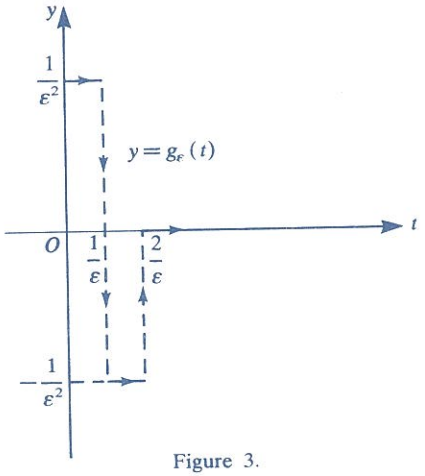


Figure 3.

Les graphes de $f_\varepsilon(t)$ et $g_\varepsilon(t)$ sont représentés sur les figures 2 et 3.

a) On vérifie facilement que, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\int_0^{+\infty} f_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

On peut écrire, d'autre part

$$f_\varepsilon(t) = \frac{t}{\varepsilon^2}\,u(t) - 2\,\frac{t-\varepsilon}{\varepsilon^2}\,u(t-\varepsilon) + \frac{t-2\varepsilon}{\varepsilon^2}\,u(t-2\varepsilon)$$

$$\mathcal{L}(f_\varepsilon(t)) = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^2}\,e^{-p\varepsilon} + \frac{1}{p^2}\,e^{-2p\varepsilon}\right)$$

$$= \left(\frac{1-e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon}\right)^2$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \mathcal{L}f_\varepsilon(t)) = 1 = \mathcal{L}(\delta(t)), \quad \delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0+} f_\varepsilon(t)$$

On voit que la formulation mathématique de $\delta(t)$ par un passage à la limite dans le domaine des t n'est pas unique.

b) On a $g_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon^2}\,[u(t) - 2\,u(t-\varepsilon) + u(t-2\varepsilon)]$

$$\mathcal{L}(g_\varepsilon(t)) = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p}\,e^{-p\varepsilon} + \frac{1}{p}\,e^{-2p\varepsilon}\right) = \frac{(1-e^{-p\varepsilon})^2}{p\varepsilon^2} \underset{\varepsilon \to 0}{\sim} \frac{p^2\varepsilon^2}{p\varepsilon^2} = p$$

Donc $\delta_1(t) \supset p$.

Ce résultat se retrouve si on admet le passage à la limite :

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} f'_\varepsilon(t) = \left[\lim_{\varepsilon \to 0+} f_\varepsilon(t) \right]', \text{ soit } \delta_1(t) = \delta'(t)$$

puisque $\delta(t) \supset 1 \Longrightarrow \delta'(t) \supset p - \delta(0) = p$.

$\delta_1(t)$ fournit une interprétation de l'original de p. On l'appelle fonction de Dirac d'ordre 1, celle d'ordre 0 étant $\delta(t)$. On définirait de façon analogue des **fonctions** de Dirac d'ordre 2, 3, ..., n par dérivations successives, on a alors $\delta_n(t) \supset p^n$. On peut en conclure qu'une transformée équivalente à p^n pour $p \longrightarrow +\infty$ correspond à un original contenant des fonctions de Dirac d'ordre $\leqslant n$. Si l'on exclut de telles fonctions, toute transformée de Laplace tend vers 0 pour p infini.

■ **10.** Résoudre l'équation intégrale (dite de Volterra)

$$\int_0^t y(u)\, f(t-u)\, \mathrm{d}u = g(t), \quad (t \geqslant 0)$$

où f et g sont deux fonctions données admettant des transformées de Laplace. Exemple : $\int_0^t y(u)\, e^{u-t}\, \mathrm{d}u = \sin t$.

Réponse : $y(t) \supset Y(p) = \dfrac{G(p)}{F(p)}$, $y(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{g(t-u)}{f(u)}\, \mathrm{d}u$.

Dans l'exemple : $y = \sin t + \cos t$.

■ **11.** a et b étant des nombres positifs donnés, montrer que $f(t) = \dfrac{\cos at - \cos bt}{t}$ admet une transformée de Laplace que l'on déterminera.

Réponse : $f(t) \supset \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{p^2 + a^2}{p^2 + b^2}$.

■ **12.** Même question pour $f(t) = \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{p}$. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, \mathrm{d}t$, (on supposera $0 < a < b$).

Réponse : $f(t) \supset \dfrac{1}{p} \ln \dfrac{p+b}{p+a}$, avec $\mathrm{Re}(p) > -a$; $I = \ln \dfrac{b}{a}$.

■ **13.** Calculer $t \bigstar \sin t$. f étant une fonction donnée admettant une transformée de Laplace, résoudre l'équation $y(t) \bigstar f(t) = y(t) - f(t)$.

Réponse : $t \bigstar \sin t = t - \sin t$.

$y(t) \supset Y(p) = \dfrac{F(p)}{1 - F(p)}$ qui tend vers 0 pour p infini s'il en est de même de F, donc possède un original.

■ **14.** Soit la fonction $f(t)$, 2π-périodique, égale à t^2 sur $[-\pi, +\pi]$.

a) Établir son développement en série de Fourier; en déduire la valeur de $S = \sum_{1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^4}$.

b) $g(t)$ étant la fonction nulle pour $t < 0$, égale à $f(t)$ pour $t \geqslant 0$, trouver sous deux formes différentes la transformée de Laplace de $g(t)$. En déduire, par un passage à la limite, la valeur de $\sum_{1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^4}$ et retrouver celle de S.

Réponse : a) $f(t) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{\cos nt}{n^2}$; $S = \dfrac{\pi^4}{90}$ (Parseval).

b) Si $\varphi(t) = f(t)$ sur $[0, 2\pi]$, $= 0$ ailleurs, on a

$\varphi(t) = t^2[u(t) - u(t-\pi)] + (t - 2\pi)^2[u(t-\pi) - u(t-2\pi)]$

$$g(t) \supset G(p) = \frac{2}{p^2}\left(\frac{1}{p} - \frac{\pi}{\operatorname{sh} p\pi}\right) = \frac{\pi^2}{3p} + 4p \sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(p^2 + n^2)}$$

Cette série est une fonction continue de p, et

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} = \lim_{p \to 0} \left[\frac{1}{4p}\left(\frac{\pi^2}{3p} - G(p)\right)\right] = \frac{7\pi^4}{720}, \quad \text{d'où } S = \frac{\pi^4}{90}.$$

■ **15.** Résoudre l'équation intégrale $\dfrac{dy}{dt} + \int_0^t y(u)\, du = 1$, avec $y(0) = \alpha$.

Réponse : $y = \sin t + \alpha \cos t$.

■ **16.** Soit $f(t) \supset F(p)$. Démontrer que si $0<\alpha<1$, et sous réserve de convergence des deux intégrales envisagées :

$$\Gamma(1-\alpha)\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} p^{-\alpha} F(p)\,dp$$

Indication : écrire l'intégrale du second membre sous forme d'intégrale double sur le domaine $t \geqslant 0$, $p \geqslant 0$.

■ **17.** Résoudre l'équation différentielle $y''+\omega^2 y=\sin \alpha t$, $\omega>0$, $\alpha>0$ avec $y(0)=y'(0)=1$.

Réponse : $y(t) \supset \dfrac{\alpha}{(p^2+\alpha^2)(p^2+\omega^2)}$.

Pour $\alpha \neq \omega$, par décomposition,

$$y(t)=\frac{1}{\omega(\alpha^2-\omega^2)}(\alpha \sin \omega t - \omega \sin \alpha t) \qquad (1)$$

Pour $\alpha=\omega$, on utilise $t \cos \omega t \supset -\left(\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\right)' = \dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

on obtient $y(t)=\dfrac{1}{2\omega^2}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$ qui résulte aussi de (1) en appliquant la règle de l'Hospital quand $\alpha \longrightarrow \omega$.

■ **18.** Résoudre le système différentiel : $x''+2y=e^{-t}$

$y''-2x=0$

avec $x(0)=1$, $y(0)=1$, $x'(0)=0$, $y'(0)=-1$.

Réponse : On trouve $Y(p)=\dfrac{p^4+p^2+2p+2}{(p+1)(p^4+4)}$:

$$y=\frac{2}{5}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}(\cos t-\sin t)+\frac{1}{10}e^{t}(\cos t+3\sin t)$$

$$x=\frac{y''}{2}=\frac{1}{5}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-t}(\cos t+\sin t)+\frac{1}{10}e^{t}(3\cos t-\sin t).$$

■ **19.** Exprimer à l'aide d'une série entière la solution, telle que $y(0)=1$, $y'(0)=0$, de l'équation différentielle $ty''+(2t+1)y'+(t-1)y=0$.

Réponses : l'équation transformée est $(p+1)^2 Y'+(p+3)Y=0$ d'où $Y=\dfrac{\lambda}{p+1}e^{\frac{2}{p+1}}$ et $\lambda=1$ du fait que $\lim\limits_{p\to+\infty} pY=1$.

D'où $y=e^{-t}\sum\limits_{1}^{+\infty}\dfrac{(2t)^n}{(n!)^2}$, pour tout $t \geqslant 0$.

CHAPITRE 5

FONCTIONS DE BESSEL

1. INTRODUCTION. ÉQUATION DE BESSEL

Les fonctions de Bessel interviennent dans de nombreux problèmes physiques, par l'intermédiaire de solutions particulières de certaines équations aux dérivées partielles. On les voit notamment apparaître dans des solutions de l'équation de Laplace $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ (1)

Rappelons qu'une telle fonction u, dite fonction harmonique du point $M(x, y, z)$ est l'expression la plus générale du potentiel d'un champ de gradients (c'est-à-dire à circulation conservative) qui est aussi à flux conservatif (puisque $\Delta u = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, u)$).

Transformons (1), où x, y, z sont les coordonnées de M dans un repère orthonormé, en exprimant $u(M)$ à l'aide des coordonnées cylindriques associées, définies par $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = v$.

De $r^2 = x^2 + y^2$, on tire $r\dfrac{\partial r}{\partial x} = x$, $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r} = \cos\theta$

$r\dfrac{\partial r}{\partial y} = y$, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r} = \sin\theta$

De $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$, on tire $(1 + \operatorname{tg}^2\theta)\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{y}{r^2} = -\dfrac{\sin\theta}{r}$

$(1 + \operatorname{tg}^2\theta)\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{x}{r^2} = \dfrac{\cos\theta}{r}$

En outre $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial v}{\partial z} = 1$

on a donc : $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \cos\theta\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin\theta \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial r} + \cos\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)$$
$$-\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{\sin\theta}{r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)$$

(en supposant les dérivées secondes continues).

Après réduction on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

On obtiendrait de même :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}$$

D'où $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ (en remplaçant v par z).

Cherchons des solutions de $\Delta u = 0$ sous la forme

$$u = f(r)\,g(z)\,h(\theta)$$

On obtient l'équation

$$f''(r)\,g(z)\,h(\theta) + \frac{1}{r}f'(r)\,g(z)\,h(\theta) + \frac{1}{r^2}f(r)\,g(z)\,h''(\theta) + f(r)\,g''(z)\,h(\theta) = 0$$

ou
$$\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{h''(\theta)}{h(\theta)} = -\frac{g''(z)}{g(z)} \qquad (2)$$

$\dfrac{g''(z)}{g(z)}$ ne devant dépendre que de r et θ, et ne dépendant *a priori* que de z, est donc une constante, que nous prendrons positive pour avoir la possibilité de $g(z)$ infini : $g''(z) = \alpha^2 g(z)$ donne

$$g(z) = Ae^{\alpha z} + Be^{-\alpha z}$$

A, B étant des constantes.

En isolant $\dfrac{h''(\theta)}{h(\theta)}$ dans (2), on voit de même que ce rapport est une constante, que nous prendrons négative pour obtenir des fonctions périodiques de l'angle θ : $h''(\theta)=-\lambda^2 h(\theta)$ donne

$$h(\theta)=C\sin\lambda\theta+D\cos\lambda\theta$$

Reste alors pour f l'équation différentielle déduite de (1) :

$$\frac{f''(r)}{f(r)}+\frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)}+\alpha^2-\frac{\lambda^2}{r^2}=0$$

ou $r^2 f''+rf'+(\alpha^2 r^2-\lambda^2)f=0$.

Dans cette équation linéaire où α et λ sont des paramètres réels, nous éliminerons un paramètre en posant $\alpha r=t$, $f(r)=y(t)$.

On a $\dfrac{df}{dr}=\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dr}=\alpha\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{d^2 f}{dr^2}=\alpha\dfrac{d^2 y}{dt^2}\cdot\dfrac{dt}{dr}=\alpha^2\dfrac{d^2 y}{dt^2}$

on arrive ainsi à l'équation :

$$\boxed{t^2 y''+ty'+(t^2-\lambda^2)y=0} \qquad (E_\lambda)$$

appelée équation de Bessel d'ordre λ.

$y(t)$ étant une solution de (1), on obtient une famille de solutions de $\Delta u=0$ sous la forme $u=y(\alpha r)(Ae^{\alpha z}+Be^{-\alpha z})(C\sin\lambda\theta+D\cos\lambda\theta)$. La résolution de (1) va donner naissance aux fonctions de Bessel, appelées aussi fonctions cylindriques.

2. FONCTION $J_0(t)$

Étudions tout d'abord le cas où $\lambda=0$, (1) s'écrit alors

$$ty''+y'+ty=0 \quad (E_0)$$

Nous avons, à la fin du chapitre précédent, trouvé une solution de cette équation par sa transformée de Laplace. On peut vérifier qu'à un coefficient près, cette fonction est la seule solution développable en série entière, en effet $y=\sum_0^{+\infty} a_n t^n$ donne

$$\sum_0^{+\infty} a_n t^{n+1}+\sum_1^{+\infty} n a_n t^{n-1}+\sum_2^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-1}=0$$

soit $\sum_{2}^{+\infty} [a_{n-2} + n a_n + n(n-1)\, a_n]\, t^{n-1} + a_1 = 0.$

Il en résulte $a_1 = 0$, $a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n^2}$ si $n \geqslant 2$.

Donc $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{2^2 \cdot 4^2 \ldots (2n)^2} = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\, a_0$

Les solutions trouvées sont donc $a_0 J_0(t)$ avec

$$\boxed{J_0(t) = \sum_{0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}}$$

fonction de Bessel d'ordre 0.

C'est une fonction paire, définie sur $\mathbb{R}$ car le rayon de convergence de cette série est infini. Rappelons que la transformée de Laplace de cette fonction est $\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$.

• On peut donner de $J_0(t)$ une forme intégrale sous laquelle on la rencontre fréquemment : le terme général de la série qui la définit rappelle l'intégrale de Wallis $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n}\theta \; d\theta = \pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} = \pi \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

de sorte que $J_0(t) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\sum_{0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\pi} \sin^{2n}\theta \, d\theta$

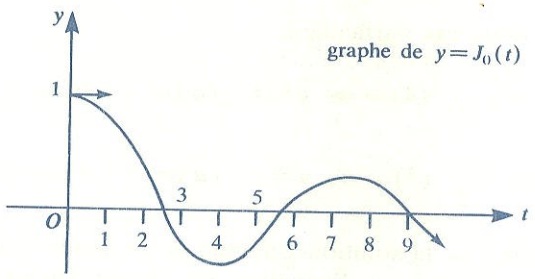
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\sum_{0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(t \sin\theta)^{2n}}{(2n)!} \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(t \sin\theta)\, d\theta$$

l'intégration et la sommation pouvant être interverties du fait de la convergence uniforme de la série.

On a donc $\boxed{J_0(t) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t \sin\theta)\, d\theta}$

L'étude de cette fonction conduit à un graphe qui, comme le développement en série, rappelle celui d'un cosinus, mais avec modulation d'amplitude et de fréquence (figure ci-dessous).



• $y=a_0 J_0(t)$ n'est pas la solution générale de l'équation de Bessel d'ordre 0. Conformément à la méthode générale, en posant $y=zJ_0(t)$ on arrive à l'équation en $z(t)$: $tJ_0 z''+(2tJ_0'+J_0)z'=0$

$$\frac{z''}{z'}=-2\frac{J_0'}{J_0}-\frac{1}{t}$$

$$z'=\frac{k}{tJ_0^2},\quad z=k\int\frac{dt}{tJ_0^2}$$

La solution générale est donc

$$y=aJ_0(t)+bJ_0(t)\int_1^t\frac{du}{uJ_0^2(u)}$$

Les seules solutions définies sur $\mathbb{R}$ correspondent à $b=0$. Nous verrons pour λ quelconque une autre expression de la solution générale.

3. ÉTUDE DE L'ÉQUATION DE BESSEL DANS LE CAS GÉNÉRAL

Revenons à (E_λ) $t^2y''+ty'+(t^2-\lambda^2)y=0$.

Bien que (E_λ) et $(E_{-\lambda})$ soient identiques, nous supposerons λ réel sans nous limiter aux valeurs positives.

Posons dans (E_λ) $y=t^\alpha u$ en supposant $t>0$ et en cherchant à déterminer α tel que l'équation se simplifie :

$$(E_\lambda)\iff t^2(t^\alpha u''+2\alpha t^{\alpha-1}u'+\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}u)+t(t^\alpha u'+\alpha t^{\alpha-1}u)+(t^2-\lambda^2)t^\alpha u=0$$

soit après réduction $t^2u''+(2\alpha+1)tu'+(t^2+\alpha^2-\lambda^2)u=0$.

L'équation se simplifie pour $\alpha=\pm\lambda$ on peut donc retenir

$$y=t^\lambda u \quad tu''+(2\lambda+1)u'+tu=0 \qquad (3)$$

$$y=t^{-\lambda}u \quad tu''+(1-2\lambda)u'+tu=0 \qquad (4)$$

Notons les deux cas particuliers :

$$\lambda=\frac{1}{2} \qquad (4) \Longrightarrow y=t^{-\frac{1}{2}}(a\cos t+b\sin t)$$

$$\lambda=-\frac{1}{2} \quad (3) \Longrightarrow y=t^{-\frac{1}{2}}(a\cos t+b\sin t)$$

Il s'agit en fait de la solution générale de la même équation $(E_{\frac{1}{2}})$ ou $(E_{-\frac{1}{2}})$. C'est le seul cas où l'équation de Bessel admet des solutions s'exprimant par les fonctions élémentaires.

• Revenons au cas général et cherchons pour (3) une solution développable en série entière $u=\sum_{0}^{+\infty} a_n t^n$

$$(3) \Longrightarrow \sum_{2}^{+\infty} n(n-1)\,a_n t^{n-1}+(2\lambda+1)\sum_{1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}+\sum_{0}^{+\infty} a_n t^{n+1}=0$$

soit $$(2\lambda+1)\,a_1+\sum_{2}^{+\infty} n(n+2\lambda)\,a_n t^{n-1}+\sum_{2}^{+\infty} a_{n-2}\,t^{n-1}=0$$

d'où les relations $$(2\lambda+1)\,a_1=0$$
$$n(n+2\lambda)\,a_n=-a_{n-2} \quad \text{pour } n\geqslant 2.$$

Le cas $\lambda=-\frac{1}{2}$ étant résolu, on en déduit $a_1=0$, $a_3=0$, ..., $a_{2n+1}=0$. a_0 étant arbitrairement fixé, on aura :

$$a_2=-\frac{a_0}{2(2+2\lambda)}$$

$$a_4=-\frac{a_2}{4(4+2\lambda)}$$

.....

$$a_{2n}=-\frac{a_{2n-2}}{2n(2n+2\lambda)}$$

d'où

$$a_{2n}=(-1)^n\frac{a_0}{2^{2n}n!(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n)}=a_0\cdot\frac{(-1)^n\,\Gamma(\lambda+1)}{2^{2n}n!\,\Gamma(\lambda+n+1)}$$

a_{2n} est donc défini pour tout n entier si λ n'est pas entier négatif.

On a alors

$$y = a_0\, t^{\lambda}\, \Gamma(\lambda+1) \sum_{0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n}\, n!\, \Gamma(\lambda+n+1)}$$

sous-espace de dimension 1 dans l'espace des solutions de (E_λ).

Nous choisirons a_0 pour définir une de ces solutions qui ait pour limite $J_0(t)$ quand $\lambda \longrightarrow 0$: il faut

$$\lim_{\lambda \to 0} a_0 \frac{\Gamma(\lambda+1)}{2^{2n}\, n!\, \Gamma(\lambda+n+1)} = \frac{1}{2^{2n}\,(n!)^2}$$

donc $\lim a_0 = 1$, nous prendrons $a_0 = \dfrac{1}{2^{\lambda}\,\Gamma(\lambda+1)}$ et nous poserons par définition :

$$\boxed{J_\lambda(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^{\lambda} \sum_{0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n}\, n!\, \Gamma(\lambda+n+1)}} \qquad \text{avec } -\lambda \notin \mathbb{N}^*$$

Le fait que $\lim_{n \to \infty} \left| \dfrac{a_{2n}}{a_{2n-2}} \right| = 0$ montre que le rayon de convergence de cette série est infini. $J_\lambda(t)$ est donc définie sur $[0, +\infty[$ si $\lambda \geqslant 0$, sur $]0, +\infty[$ si $\lambda < 0$. En fait lorsque la valeur de λ le permet (par exemple λ entier, cas sur lequel nous reviendrons, ou $\lambda = \dfrac{1}{3}$), on peut considérer $J_\lambda(t)$ comme définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction $J_\lambda(t)$ est, par définition, la fonction de Bessel d'ordre λ.

Le calcul précédent étant valable quel que soit le signe de λ, on a aussi

$$J_{-\lambda}(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^{-\lambda} \sum_{0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n}\, n!\, \Gamma(-\lambda+n+1)} \qquad \text{avec } \lambda \notin \mathbb{N}^*$$

$J_\lambda(t)$ et $J_{-\lambda}(t)$ sont deux solutions particulières de (E_λ); leur rapport ne peut pas être une constante car si, par exemple $\lambda > 0$, $J_\lambda(t) \longrightarrow 0$ et $J_{-\lambda}(t) \longrightarrow +\infty$ quand $t \longrightarrow 0$. Elles sont donc linéairement indépendantes. Il en résulte que, si λ n'est pas entier, la solution générale de l'équation de Bessel d'ordre λ est

$$y = a\, J_\lambda(t) + b\, J_{-\lambda}(t)$$

• Revenons sur le cas particulier $\lambda=\frac{1}{2}$. Considérons

$$J_{-1/2}(t)=\left(\frac{t}{2}\right)^{-1/2}\sum_{0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2^{2n}\,n!\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots3\cdot1}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!}\sqrt{\pi}$$

donc

$$J_{-1/2}(t)=\left(\frac{t}{2}\right)^{-1/2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos t$$

On vérifierait de même que $\boxed{J_{1/2}(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin t}$

4. ÉQUATION DE BESSEL D'ORDRE ENTIER

Pour $\lambda=k\in\mathbb{N}^*$ $\Gamma(k+n+1)=(k+n)!$ et

$$\boxed{J_k(t)=\left(\frac{t}{2}\right)^k\sum_{0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2^{2n}\,n!\,(n+k)!}}$$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$J_{-k}(t)$ n'est *a priori* pas définie, puisque $\Gamma(-k+n+1)$ n'est pas définie pour $n\leqslant k-1$. Mais en considérant $\lambda\longrightarrow -k$, $\Gamma(\lambda+n+1)\longrightarrow\infty$ et en convenant que $\frac{1}{\Gamma(-k+n+1)}=0$ pour $n\leqslant k-1$ il vient

$$J_{-k}(t)=\lim_{\lambda\to-k}J_\lambda(t)=\left(\frac{t}{2}\right)^{-k}\sum_{k}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2^{2n}\,n!\,(n+k)!}$$

et $n-k=p$ donne $J_{-k}(t)=\left(\frac{t}{2}\right)^{-k}\sum_{0}^{+\infty}(-1)^k(-1)^p\frac{t^{2p+2k}}{2^{2k}\,2^{2p}\,(p+k)!\,p!}$

il en résulte $J_{-k}(t)=(-1)^k J_k(t)$, $k\in\mathbb{N}$

$y=aJ_k(t)+bJ_{-k}(t)$ n'est pas solution générale de (E_k).

On pourrait trouver pour (E_k) une seconde solution particulière, sous forme d'intégrale, en posant $y=zJ_k(t)$ dans (E_k), mais il est plus simple

d'observer que si $\lambda \longrightarrow k$, on peut trouver une combinaison linéaire de $J_\lambda(t)$ et $J_{-\lambda}(t)$ ne tendant pas vers $J_k(t)$ ni $J_{-k}(t)$ et c'est ainsi que l'on a défini pour k entier une **fonction de Bessel de seconde espèce** (appelée aussi fonction de Neumann ou fonction de Weber)

$$Y_k(t) = \lim_{\lambda \to k} \frac{J_\lambda(t)\cos\lambda\pi - J_{-\lambda}(t)}{\sin\lambda\pi} \qquad \text{(notée aussi } N_k(t)\text{)}$$

La solution générale de (E_k) est donc $y = aJ_k(t) + bY_k(t)$.

5. RELATIONS « DE RÉCURRENCE » SUR LES FONCTIONS DE BESSEL

- Formons l'expression

$$A = J_{\lambda+1}(t) + J_{\lambda-1}(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^{\lambda+1} \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n}\, n!\, \Gamma(\lambda+n+2)} + \left(\frac{t}{2}\right)^{\lambda-1} \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n}\, n!\, \Gamma(\lambda+n)}$$

$$A = \left(\frac{t}{2}\right)^{\lambda} \left[\sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2^{2n+1}\, n!\, \Gamma(\lambda+n+2)} + \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n-1}(\lambda+n)}{2^{2n-1}\, n!\, \Gamma(\lambda+n+1)} \right]$$

$$= \left(\frac{t}{2}\right)^{\lambda} \left[\sum_1 (-1)^{n-1} \frac{t^{2n-1}}{2^{2n-1}(n-1)!\, \Gamma(\lambda+n+1)} + \sum_1^{+\infty} (-1)^n \frac{(\lambda+n)\, t^{2n-1}}{2^{2n-1}\, n!\, \Gamma(\lambda+n+1)} + \frac{2\lambda}{t\Gamma(\lambda+1)} \right]$$

$$= \frac{2\lambda}{t} \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{\lambda} \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n}\, n!\, \Gamma(\lambda+n+1)} = \frac{2\lambda}{t} J_\lambda(t)$$

On obtient ainsi la première relation de récurrence :

$$\boxed{J_{\lambda+1}(t) + J_{\lambda-1}(t) = \frac{2\lambda}{t} J_\lambda(t)} \qquad (5)$$

• On vérifie de même :

$$\boxed{J_{\lambda-1}(t)-J_{\lambda+1}(t)=2J'_{\lambda}(t)} \tag{6}$$

• Il en résulte encore :

$$\boxed{J_{\lambda+1}(t)=\frac{\lambda}{t}J_{\lambda}(t)-J'_{\lambda}(t)} \tag{7}$$

En particulier $J_1(t)=-J'_0(t)$

6. FORME INTÉGRALE D'UNE FONCTION DE BESSEL D'ORDRE ENTIER

Nous avons établi $J_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\theta)\,d\theta$.

Il en résulte

$$J_1(t)=-J'_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t\sin\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\theta-\theta)\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\theta+\theta)\,d\theta=I_1-I_2$$

Dans I_2, $\theta=\pi-\varphi$ donne $I_2=\int_0^{\pi}\cos(t\sin\varphi+\pi-\varphi)\,dy=-I_2$

donc $$J_1(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\theta-\theta)\,d\theta$$

Il semble que $J_k(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\theta-k\theta)\,d\theta$ (8)

Démontrons-le par récurrence en supposant (8) vérifiée pour k entier $\leqslant n$:

$$J_{n+1}(t)=J_{n-1}(t)-2J'_n(t)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta+\theta)\,d\theta+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(t\sin\theta-n\theta)\cdot\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta+\theta)\,d\theta$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(t\sin\theta-n\theta-\theta)-\cos(t\sin\theta-n\theta+\theta)]\,d\theta$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos[t\sin\theta-(n+1)\theta]\,d\theta$$

On a donc bien, $\forall k\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{J_k(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(t\sin\theta-k\theta)\,d\theta}$$

Cette relation est d'ailleurs facile à étendre aux valeurs entières négatives de k. Remarquons que si $k\notin\mathbb{Z}$ l'intégrale précédente garde un sens, définit une fonction de k continue sur $\mathbb{R}$ qui « prolonge » $J_k(t)$, mais n'est pas une fonction de Bessel.

Notons aussi qu'on peut donner à $J_k(t)$ pour k entier, la forme :

$$J_k(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(t\sin\theta-k\theta)}\,d\theta$$

7. INTERPRÉTATION DE $J_k(t)$ PAR UNE SÉRIE DE FOURIER. FONCTION GÉNÉRATRICE

La forme précédente de $J_k(t)$ montre que cette fonction est le coefficient c_k du développement en série de Fourier complexe de $f(x)=e^{it\sin x}$

$$e^{it\sin x}=\sum_{-\infty}^{+\infty}J_k(t)\,e^{ikx}$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire dans la relation précédente et tenant compte de $J_{-k}(t)=(-1)^k J_k(t)$ on en déduit aussitôt

$$\cos(t\sin x)=J_0(t)+2\sum_{1}^{+\infty}J_{2n}(t)\cos 2nx$$

$$\sin(t\sin x)=2\sum_{0}^{+\infty}J_{2n+1}(t)\sin(2n+1)x$$

• En appliquant à (9) la formule de Parseval, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |e^{it\sin x}|^2\,dx=\sum_{-\infty}^{+\infty} J_k^2(t)$$

et compte tenu de $J_{-k}^2(t)=J_k^2(t)$

$$J_0^2(t)+2\sum_{1}^{+\infty} J_k^2(t)=1$$

Ceci montre que $J_k(t)\xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ que $|J_0(t)|\leqslant 1$ et $|J_k(t)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$.

• En posant dans (9) $e^{ix}=z$ on obtient

$$e^{\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(t)\,z^n,\quad \text{pour } |z|=1$$

En fait cette relation est valable quel que soit z complexe : $f(z)=e^{\frac{t}{2}z}e^{-\frac{t}{2z}}$ est développable en série de Laurent sur $\mathbb{C}^*$, et le calcul du coefficient c_n dans $f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ conduit précisément à l'intégrale définissant $J_n(t)$.

La relation $\boxed{e^{\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(t)\,z^n}$ pour tout $z\neq 0$, se traduit en disant que $e^{\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$ est la fonction génératrice des fonctions de Bessel d'ordre entier. Nous verrons dans le chapitre suivant d'autres exemples d'une telle génération.

8. TRANSFORMÉE DE LAPLACE D'UNE FONCTION DE BESSEL

Nous avons déjà vu $J_0(t)\supset\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$.

Transformons l'équation de Bessel (E_λ) par la transformation de Laplace, en posant $y(t)\supset Y(p)$, $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_0'$.

(E_λ) s'écrivant $t^2y''+ty'+(t^2-\lambda^2)y=0$ nous aurons $ty\supset -Y'$, $t^2y\supset Y''$

$$y'\supset pY-y_0,\quad ty'\supset -pY'-Y$$

$$y''\supset p^2Y-py_0-y_0',\quad ty''\supset -2pY-p^2Y'+y_0$$

$$t^2y''\supset 2Y+4pY'+p^2Y''$$

$$(E_\lambda)\supset(p^2+1)Y''+3pY'+(1-\lambda^2)Y=0\quad (F_\lambda)$$

Pour $\lambda = 1$ l'équation se simplifie et donne

$$Y' = a(p^2+1)^{-\frac{3}{2}} = \frac{dY}{dp}$$

$p = \operatorname{sh} u$ donne $dY = a\dfrac{du}{\operatorname{ch}^2 u}$, $Y = a \operatorname{th} u + b = a\dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}} + b$.

Pour déterminer a et b, utilisons le premier terme du développement en série entière de $J_1(t)$

$$J_1(t) = \frac{t}{2}\sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n} n!(n+1)!} = \frac{t}{2} + \dots$$

$$\supset \frac{1}{2p^2} + \dots$$

Or $Y = b + a\left(1+\dfrac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = b + a - \dfrac{a}{2p^2} + \dots$

Pour que $Y \subset J_1(t)$ il faut donc $b+a=0$, $a=-1$, d'où $b=1$, et on obtient $J_1(t) \supset \dfrac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}$.

Pour $\lambda \neq 1$, nous sommes amenés à raisonner tout d'abord pour $\lambda > 1$, de façon que y_0 et y_0' soient finis (d'ailleurs nuls).

Par analogie avec ce qui précède, prenons pour variable $u = \operatorname{Arg\,sh} p$ dans (F_λ), d'où $Y(p) = Z(u)$

$$\frac{dY}{dp} = \frac{dZ}{du}\cdot\frac{du}{dp} = \frac{1}{\operatorname{ch} u}\frac{dZ}{du}, \qquad \text{puisque } p = \operatorname{sh} u$$

$$\frac{d^2Y}{dp^2} = \left(-\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u}\frac{dZ}{du} + \frac{1}{\operatorname{ch} u}\frac{d^2Z}{du^2}\right)\cdot\frac{du}{dp}$$

$$= -\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^3 u}\frac{dZ}{du} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u}\frac{d^2Z}{du^2}$$

et $$F(\lambda) \Longrightarrow \frac{d^2Z}{du^2} - \operatorname{th} u\frac{dZ}{du} + 3\operatorname{th} u\frac{dZ}{du} + (1-\lambda^2)Z = 0$$

ou $$Z'' + 2\operatorname{th} u\, Z' + (1+\lambda^2)Z = 0$$

$\sqrt{p^2+1} = \operatorname{ch} u$ semblant devoir intervenir en dénominateur dans Z, posons encore $Z = \dfrac{\varphi(u)}{\operatorname{ch} u}$ d'où

$$Z' = \frac{\varphi'}{\operatorname{ch} u} - \frac{\varphi \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u}, \qquad Z'' = \frac{\varphi''}{\operatorname{ch} u} - 2\frac{\varphi' \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch}^2 u} - \varphi\cdot\frac{\operatorname{ch}^2 u - 2\operatorname{sh}^2 u}{\operatorname{ch}^3 u},$$

et

$$\varphi'' \operatorname{ch}^2 u - 2\varphi' \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u - \varphi(\operatorname{ch}^2 u - 2\operatorname{sh}^2 u) + 2\varphi' \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u - 2\varphi \operatorname{sh}^2 u + (1-\lambda^2)\varphi \operatorname{ch}^2 u = 0$$

$$\varphi'' - \lambda^2 \varphi = 0.$$

On en déduit $\varphi(u) = ae^{\lambda u} + be^{-\lambda u}$

$$Z = \frac{1}{ch\ u}(ae^{\lambda u} + be^{-\lambda u})$$

Comme $\operatorname{ch} u = \sqrt{p^2+1}$, $e^u = \operatorname{sh} u + \operatorname{ch} u = p + \sqrt{p^2+1}$

on a $Y = \dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}[a(p+\sqrt{p^2+1})^{\lambda} + b(p+\sqrt{p^2+1})^{-\lambda}]$.

Reste à déterminer a et b tels que $Y \subset J_\lambda(t)$.

Comme $\lim\limits_{p \to +\infty} Y(p) = 0$ il faut $a = 0$. La considération du premier terme du développement de $J_\lambda(t)$ par rapport à t, dont le transformé est le premier terme du développement de $Y(p)$ par rapport à $\dfrac{1}{p}$, montre que $b = 1$

d'où $$Y = \frac{(p+\sqrt{p^2+1})^{-\lambda}}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{\lambda}}{\sqrt{p^2+1}}$$

Ceci est établi pour $\lambda \geqslant 1$ et pour $\lambda = 0$.

Pour $-1 < \lambda < 1$, $J_\lambda(t)$ est encore transformable, puisque d'ordre λ par rapport à $\dfrac{1}{t}$ au voisinage de zéro, et l'application répétée de

$$J_\lambda(t) = J_{\lambda+2}(t) + 2J'_{\lambda+2}(t)$$

qui équivaut à

$$\mathcal{L}(J_\lambda(t)) = \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{\lambda+2}}{\sqrt{p^2+1}} + 2p\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{\lambda+1}}{\sqrt{p^2+1}} - 2J_{\lambda+1}(0)$$

montre, après un calcul simple, que la formule trouvée plus haut reste valable.

Ainsi, pour $\lambda > -1$ $\boxed{J_\lambda(t) \supset \dfrac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{\lambda}}{\sqrt{p^2+1}}}$

9. ORTHOGONALITÉ. RELATIONS CONCERNANT LES ZÉROS DES FONCTIONS DE BESSEL

$J_\lambda(t)$ est solution de l'équation $t^2 y'' + ty' + (t^2 - \lambda^2) y = 0$.

D'après le paragraphe 1, ou d'après le changement de variable $t=\frac{x}{\alpha}$ $J_\lambda(\alpha t)$ est solution de $t^2 y''+ty'+(\alpha^2 t^2-\lambda^2)\, y=0$ ou

$$y''+\frac{1}{t}\, y'+\left(\alpha^2-\frac{\lambda^2}{t^2}\right) y=0.$$

Soit $y_1=J_\lambda(\alpha t)$, $y_2=J_\lambda(\beta t)$ α et β étant des constantes.

On a
$$y_1''+\frac{1}{t}\, y_1'+\left(\alpha^2-\frac{\lambda^2}{t^2}\right) y_1=0 \tag{10}$$

$$y_2''+\frac{1}{t}\, y_2'+\left(\beta^2-\frac{\lambda^2}{t^2}\right) y_2=0 \tag{11}$$

Multiplions (10) par y_2, (11) par y_1 et retranchons, il vient

$$y_1'' y_2-y_1 y_2''+\frac{1}{t}\,(y_1' y_2-y_1 y_2')+(\alpha^2-\beta^2)\, y_1 y_2=0$$

Si nous posons $y_1' y_2-y_1 y_2'=u$ on a $y_1'' y_2-y_1 y_2''=u'$

et
$$tu'+u=(\beta^2-\alpha^2)\, ty_1 y_2=(tu)'$$

d'où en intégrant de 0 à l (positif) :

$$[tu(t)]_0^l=(\beta^2-\alpha^2)\int_0^l ty_1 y_2\, \mathrm{d}t$$

relation valable si $ty_1 y_2$ est soit fini, soit infiniment grand d'ordre <1, quand $t \longrightarrow 0$, c'est pourquoi nous supposerons $\lambda > -1$.

En explicitant cette relation, on obtient :

$$l[\alpha J_\lambda'(\alpha l)\, J_\lambda(\beta l)-\beta J_\lambda(\alpha l)\, J_\lambda'(\beta l)]=(\beta^2-\alpha^2)\int_0^l tJ_\lambda(\alpha t)\, J_\lambda(\beta t)\, \mathrm{d}t \tag{12}$$

Supposons maintenant que α et β sont deux racines distinctes de l'équation $J_\lambda(lx)=0$. Alors le premier membre est nul, $\beta^2-\alpha^2 \neq 0$, et :

$$\int_0^l tJ_\lambda(\alpha t)\, J_\lambda(\beta t)\, \mathrm{d}t=0$$

Or on peut démontrer, et nous l'admettrons, que l'équation $J_\lambda(t)=0$ a une infinité de racines positives, donc $J_\lambda(lx)=0$ a une infinité de racines que l'on peut classer par ordre croissant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, et pour p et n entiers distincts $\int_0^1 tJ_\lambda(\alpha_p t)\, J_\lambda(\alpha_n t)\, \mathrm{d}t=0$.

Il est facile de vérifier que l'application bilinéaire symétrique $(f, g) \longrightarrow \int_0^l tf(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ est un produit scalaire (voir t. 4), il s'ensuit

que les fonctions $J_\lambda(\alpha_n t)$ sont deux à deux orthogonales vis-à-vis de ce produit scalaire, on dit qu'elles forment un système orthogonal sur l'intervalle $[0, l]$ par rapport au « poids » t.

Calculons la norme de $J_\lambda(\alpha_n t)$ définie par

$$\mu_n^2 = \int_0^l tJ_\lambda^2(\alpha_n t)\,dt = \lim_{\beta \to \alpha_n} \int_0^l tJ_\lambda(\alpha_n t)\,J_\lambda(\beta t)\,dt$$

D'après (12) où $\alpha = \alpha_n$ et $J_\lambda(\alpha l) = 0$

$$\mu_n^2 = l \cdot \lim_{\beta \to \alpha_n} \frac{\alpha_n J'_\lambda(\alpha_n l)\,J_\lambda(\beta l)}{\beta^2 - \alpha_n^2}$$

et, en appliquant la règle de l'Hospital,

$$\mu_n^2 = l \cdot \lim_{\beta \to \alpha_n} \frac{\alpha_n J'_\lambda(\alpha_n l) \cdot lJ'_\lambda(\beta l)}{2\beta} = \frac{l^2}{2} J'^2_\lambda(\alpha_n l)$$

Mais on sait que $J_{\lambda+1}(t) = \frac{\lambda}{t} J_\lambda(t) - J'_\lambda(t)$

donc $$J_{\lambda+1}(\alpha_n l) = -J'_\lambda(\alpha_n l)$$

et $$\mu_n^2 = \frac{l^2}{2} J^2_{\lambda+1}(\alpha_n l) \qquad (13)$$

• Il en résulte que le système des fonctions $\frac{\sqrt{2}}{l} \frac{J_\lambda(\alpha_n t)}{|J_{\lambda+1}(\alpha_n l)|}$ constitue une base orthonormée vis-à-vis du produit scalaire défini plus haut, suivant laquelle il est possible de décomposer d'une façon unique une fonction définie et continue presque partout sur $[0, l]$:

$$f(t) = \sum_1^{+\infty} c_n J_\lambda(\alpha_n t)$$

avec $c_n = \frac{1}{\mu_n^2} \int_0^l f(t)\,J_\lambda(\alpha_n t)\,dt$.

Il s'agit d'une série analogue à une série de Fourier, connue sous le nom de **série de Fourier-Bessel.** Rappelons à ce propos l'analogie de comportement à l'infini de $J_\lambda(\alpha t)$ avec une fonction sinusoïdale, l'équation $y'' + \frac{1}{t} y' + \left(\alpha^2 - \frac{\lambda^2}{t^2}\right) y = 0$ ayant pour limite quand $t \longrightarrow +\infty$ $y'' + \alpha^2 y = 0$ de solution générale $a \cos \alpha t + b \sin \alpha t$.

• La relation (13) est intéressante en elle-même sous la forme

$$\boxed{\int_0^l tJ_\lambda^2(\alpha t)\,dt = \frac{l^2}{2} J^2_{\lambda+1}(\alpha l)}$$

α étant racine de l'équation $J_\lambda(lx) = 0$.

En particulier, pour $\lambda = 0$, et α étant une racine de $J_0(x) = 0$, on a

$$\int_0^1 J_0^2(\alpha t) \cdot t \, dt = \frac{1}{2} J_1^2(\alpha)$$

et en posant $t = \frac{r}{a}$

$$\int_0^a J_0^2\left(\alpha \frac{r}{a}\right) r \, dr = \frac{a^2}{2} J_1^2(\alpha)$$

relation que l'on utilise dans la théorie des hyperfréquences.

Résumé du chapitre 5

• La recherche de fonctions harmoniques $u = f(r)\, g(z)\, h(\theta)$, solutions de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ écrite en coordonnées cylindriques, conduit à $f(r) = y(\alpha r)$, $y(t)$ étant solution de l'**équation de Bessel** d'ordre λ

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - \lambda^2) y = 0 \quad (E_\lambda)$$

Une solution particulière de cette équation est

$$J_\lambda(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\lambda \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n} n! \Gamma(\lambda + n + 1)}, \quad \text{où } -\lambda \notin \mathbb{N}^*, \ t > 0.$$

• Si λ n'est pas entier, (E_λ) a pour solution générale

$$y = aJ_\lambda(t) + bJ_{-\lambda}(t)$$

On a $J_{\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t$, $J_{-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos t$

• Si λ est un entier k

$$J_k(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^k \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n} n! (n+k)!}$$

et on peut, par un passage à la limite, définir

$$J_{-k}(t) = (-1)^k J_k(t)$$

En particulier $J_0(t) = \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}$

La solution générale de (E_λ) est alors

$$y = aJ_k(t) + bY_k(t) \quad \text{où} \quad Y_k(t) = \lim_{\lambda \to k} \frac{J_\lambda(t)\cos \lambda\pi - J_{-\lambda}(t)}{\sin \lambda\pi}$$

est une fonction de Bessel de seconde espèce.

- **Relations de récurrence sur les fonctions de Bessel.**

$$J_{\lambda+1}(t) + J_{\lambda-1}(t) = \frac{2\lambda}{t} J_\lambda(t)$$

$$J_{\lambda-1}(t) - J_{\lambda+1}(t) = 2J'_\lambda(t)$$

En particulier $\qquad J_1(t) = -J'_0(t).$

- **Forme intégrale de $J_k(t)$, k entier.**

$$J_k(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t \sin \theta - k\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t \sin \theta - k\theta)}\, d\theta$$

- **Développement en série de Fourier de $e^{it \sin x}$.**

$$e^{it \sin x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_k(t)\, e^{ikx}$$

- **Fonction génératrice.**

$$e^{\frac{t}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(t)\, z^n, \quad z \neq 0$$

- **Transformée de Laplace.**

$$J_\lambda(t) \supset \frac{(\sqrt{p^2+1} - p)^\lambda}{\sqrt{p^2+1}} \qquad \lambda > -1.$$

• **Relations faisant intervenir les zéros des fonctions de Bessel.**

α et β étant deux racines distinctes de $J_\lambda(lx)=0$:

$$\int_0^t tJ_\lambda(\alpha t)\,J_\lambda(\beta t)\,\mathrm{d}t=0$$

$$\int_0^t tJ_\lambda^2(\alpha t)\,\mathrm{d}t=\frac{l^2}{2}\,J_{\lambda+1}^2(\alpha l).$$

EXERCICES

■ **1.** *a*) Démontrer, en utilisant l'équation de Bessel, que $J_\lambda(t)$ n'a que des zéros simples sur $\mathbb{R}$.

b) Démontrer les relations $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^\lambda J_\lambda(t))=t^\lambda J_{\lambda-1}(t)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^{-\lambda}J_\lambda(t))=t^{-\lambda}J_{\lambda+1}(t),\quad t>0$$

c) Déduire de ces relations que les zéros réels de $J_\lambda(t)$ et $J_{\lambda+1}(t)$ sont enchevêtrés.

---

a) Supposons que $J_\lambda(t)$, ou plus généralement une solution $y(t)$ de l'équation

$$t^2y''+ty'+(t^2-\lambda^2)y=0\quad (E_\lambda)$$

ait une racine multiple $\alpha>0$. Alors $y(\alpha)=y'(\alpha)=0$,

et $$(E_\lambda)\Longrightarrow y''(\alpha)=0.$$

Par dérivation,

$$(E_\lambda)\Longrightarrow 2ty''+t^2y'''+y'+ty''+2ty+(t^2-\lambda^2)y'=0$$

d'où $y'''(\alpha)=0$, et par dérivations successives $y^{(n)}(\alpha)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Or $J_\lambda(t)$ est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^+$, elle admet un développement de Taylor suivant $t-\alpha$, et ce développement serait alors

$J_\lambda(t)=\sum_0^{+\infty}\dfrac{(t-\alpha)^n}{n!}J_\lambda^{(n)}(\alpha)=0$, ce qui est impossible.

Donc $J_\lambda(t)$ n'a que des zéros simples dans $\mathbb{R}$. On peut d'ailleurs démontrer que $J_\lambda(t)$ n'a que des zéros réels.

b) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^\lambda J_\lambda(t))=\lambda t^{\lambda-1}J_\lambda(t)+t^\lambda J'_\lambda(t)$$

Or

$$J_{\lambda+1}(t)+J_{\lambda-1}(t)=\frac{2\lambda}{t}J_\lambda(t) \Longrightarrow \lambda t^{\lambda-1}J_\lambda(t)=\frac{1}{2}t^\lambda[J_{\lambda+1}(t)+J_{\lambda-1}(t)]$$

$$J_{\lambda-1}(t)-J_{\lambda+1}(t)=2J'_\lambda(t) \Longrightarrow t^\lambda J'_\lambda(t)=\frac{1}{2}t^\lambda[J_{\lambda-1}(t)-J_{\lambda+1}(t)]$$

d'où
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^\lambda J_\lambda(t))=t^\lambda J_{\lambda-1}(t)$$

Démonstration analogue pour la deuxième relation.

c) Le théorème de Rolle montre qu'entre deux zéros consécutifs de $t^\lambda J_\lambda(t)$, il y a au moins un zéro de sa dérivée $t^\lambda J_{\lambda-1}(t)$, et qu'entre deux zéros consécutifs de $t^{-\lambda}J_\lambda(t)$, il y a au moins un zéro de sa dérivée $t^{-\lambda}J_{\lambda+1}(t)$. Comme $t^\lambda \neq 0$ et $t^{-\lambda}\neq 0$, on voit qu'entre deux zéros de $J_\lambda(t)$ il y a au moins un zéro de $J_{\lambda+1}(t)$, et réciproquement : il est donc impossible qu'entre deux zéros de l'une de ces fonctions, il existe plus d'un zéro de l'autre, d'où l'enchevêtrement

$$\alpha_n(\lambda)<\alpha_n(\lambda+1)<\alpha_{n+1}(\lambda)<\alpha_{n+1}(\lambda+1)$$

$\alpha_n(\lambda)$ et $\alpha_{n+1}(\lambda)$ étant deux zéros consécutifs de $J_\lambda(t)$.

■ **2.** Établir la relation $J_0(\sqrt{t})\supset\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{4p}}$.

En déduire les solutions, finies pour $x=0$, de l'équation différentielle

(1) $\qquad xy''+y'+\alpha^2 y=0, \quad \alpha>0, \quad y(x)$ inconnue, $\quad x\geqslant 0$

équation obtenue par Bernoulli dans l'étude des oscillations d'un fil pesant suspendu en une de ses extrémités.

$$J_0(\sqrt{t})=\sum_0^{+\infty}(-1)^n\frac{t^n}{2^{2n}(n!)^2}\supset\sum_0^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{2^{2n}(n!)^2p^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{p}\sum_0^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{4p}\right)^n=\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{4p}}$$

Transformons (1) par la méthode de Laplace :

$$y\supset Y(p),\ y'\supset pY-y_0,\ y''\supset p^2Y-py_0-y'_0,\ xy''\supset -2pY-p^2Y'+y_0$$
$$(1)\supset p^2Y'+(p-\alpha^2)Y=0$$

d'où $Y=\frac{k}{p}e^{-\frac{\alpha^2}{p}}=\frac{y_0}{p}e^{-\frac{\alpha^2}{p}}$ (car $\lim_{x\to 0}y=\lim_{p\to+\infty}pY$).

Par la formule de l'homothétie (chap. 4) on en déduit :

$$y=y_0J_0(2\alpha\sqrt{x})$$

■ **3.** Retrouver, à partir de la forme intégrale complexe de $J_k(t)(k \in \mathbb{N})$, et à l'aide de la méthode des résidus, la transformée de Laplace de $J_k(t)$, en prenant $p > 0$.

$$J_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t \sin \theta - k\theta)}\, d\theta$$

$$\supset \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t \sin \theta - k\theta)}\, d\theta \right) e^{-pt}\, dt$$

Pour p suffisamment grand, l'intégrale est uniformément convergente par rapport à t et on peut intervertir les intégrations, donc

$$J_k(t) \supset \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \left(\int_0^{+\infty} e^{(i \sin \theta - p)t}\, dt \right) d\theta = F(p)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta}\, d\theta \left[\frac{e^{(i \sin \theta - p)t}}{i \sin \theta - p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ik\theta}}{i \sin \theta - p}\, d\theta$$

Posons $\theta = -\varphi$, puis $e^{i\varphi} = z$, nous obtenons

$$F(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{ik\varphi}}{p + i \sin \varphi}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{z^k}{p + \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{1}{i\pi} \int_{\Gamma^+} \frac{z^k}{z^2 + 2pz - 1}\, dz$$

Le théorème des résidus nous donne

$$F(p) = 2\ \text{Rés}_\alpha(f), \text{ avec } f(z) = \frac{z^k}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{P(z)}{Q(z)}, \qquad \alpha\beta = -1,$$

α étant le pôle de module inférieur à 1, soit $\alpha = -p + \sqrt{p^2+1}$.

$$\text{Donc } F(p) = 2\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)} = 2\frac{\alpha^k}{2\alpha + 2p} = \frac{(\sqrt{p^2+1} - p)^k}{\sqrt{p^2+1}}$$

formule déjà établie pour tout $k > -1$ par une autre méthode.

■ **4.** Établir la formule d'addition des fonctions de Bessel d'ordre entier

$$J_k(a+b) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(a)\, J_{k-n}(b)$$

Il suffit d'écrire de deux manières le coefficient de z^k dans la formule

$$e^{\frac{a+b}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)} = e^{\frac{a}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}\, e^{\frac{b}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}$$

■ **5.** Établir, pour k entier $\geqslant 0$, la relation

$$J_k^2(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{2k}(2t\cos x)\,dx$$

Méthode : écrire $J_k^2(t)$ sous forme d'une intégrale double sur le carré $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$, $-\pi\leqslant\varphi\leqslant\pi$, et effectuer le changement de variables $\theta-\varphi=u$, $\theta+\varphi=v$.

■ **6.** Dans l'équation de Bessel d'ordre 0, $ty''+y'+ty=0$, (E_0) on effectue le changement de fonction inconnue $y=t^{-\frac{1}{2}}u(t)$. $u(t)$ étant une solution de l'équation transformée de (E_0), $v(t)$ une solution de l'équation $v''+v=0$, a et b deux nombres positifs, établir la relation

$$\int_b^a \frac{uv}{t^2}\,dt=4[uv'-u'v]_b^a$$

En déduire que $J_0(t)$ s'annule sur tout intervalle $[a, a+\pi]$.

L'équation que vérifie u est $u''+u+\dfrac{u}{4t^2}=0$ (1)

D'autre part $v''+v=0$ (2)

En multipliant (1) par v, (2) par $-u$, et ajoutant, on obtient :

$$\frac{uv}{4t^2}=uv''-vu''=(uv'-vu')'$$

d'où $$\int_a^b \frac{uv}{t^2}\,dt=4[uv'-u'v]_a^b$$

Appliquons cette relation avec $v=\sin(t-a)$, $b=a+\pi$.

$$\int_a^{a+\pi}\frac{u}{t^2}\sin(t-a)\,dt=4[u\cos(t-a)-u'\sin(t-a)]_a^{a+\pi}$$
$$=-4[u(a)+u(a+\pi)]$$

Si u ne s'annulait pas sur $[a, a+\pi]$, il garderait un signe constant, le premier membre aurait ce signe, le second membre le signe contraire, d'où contradiction. $u(t)$, solution de (1), donc en particulier $t^{\frac{1}{2}}J_0(t)$, et $J_0(t)$ elle-même, s'annule donc sur l'intervalle $[a, a+\pi]$.

En particulier $J_0(t)$ s'annule au moins une fois sur $[0, \pi]$. Comme en outre, sur $[0, \pi]$, $J_0'(t)=-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\sin(t\sin\theta)\,d\theta<0$, puisque $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ et $0\leqslant t\sin\theta\leqslant\pi$. $J_0(t)$ ne peut s'annuler qu'une fois sur $[0, \pi]$. Il n'en va pas de même sur tout intervalle $[a, a+\pi]$, où on peut seulement affirmer que $J_0(t)$ s'annule au moins une fois, ainsi qu'une table numérique des fonctions de Bessel le confirme aisément. Cependant, on peut établir que deux zéros consécutifs de $J_0(t)$ sont séparés par un intervalle de l'ordre de π, c'est-à-dire de 3.

CHAPITRE 6

NOTIONS SUR QUELQUES AUTRES FONCTIONS SPÉCIALES DE L'ANALYSE

1. INTRODUCTION

Outre les fonctions eulériennes et les fonctions de Bessel, de nombreuses fonctions ont été introduites, le plus souvent à partir d'équations différentielles linéaires à coefficients variables qui, elles-mêmes pour la plupart, ont pour origine un problème physique. Nous allons en étudier brièvement quelques-unes. Nous aborderons aussi quelques fonctions d'origines diverses, telles que les fonctions elliptiques.

2. COMPLÉMENTS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES. THÉORÈME DE FUCHS

Nous raisonnerons ici sur le cas usuel d'une équation du second ordre, sans second membre, réductible à la forme $y'' + A(x)\, y' + B(x)\, y = 0$ où $A(x)$ et $B(x)$ sont des fonctions données définies sur un domaine $\mathbb{D}$.

Il est souvent possible de trouver pour une telle équation, soit des solutions sous forme de séries entières en x (ou en $x - x_0$), $y = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$, soit des solutions de la forme $y = x^\alpha z$, où z est une série entière.

Tel est le cas de l'équation de Bessel. Mais cette méthode ne s'applique pas toujours.

Exemple.

Si dans l'équation $y'' + \dfrac{y}{x^3} = 0$ nous posons $y = x^\alpha z$, puis $z = \sum_0^{+\infty} a_n x^n$, nous arrivons à la relation de récurrence

$$a_n = -(n + \alpha - 1)(n + \alpha - 2)\, a_{n-1}$$

de type classique, mais avec $a_0 = 0$, donc $a_n = 0$; et la seule solution ainsi trouvée est $y = 0$, qui est sans intérêt.

Le théorème de Fuchs, que nous admettrons, permet de savoir *a priori* si une telle tentative sera efficace. Il s'énonce ainsi :

> Théorème de Fuchs :
> Soit l'équation différentielle $y''+A(x)\,y'+B(x)\,y=0$; soit x_0 un pôle de $A(x)$, ou de $B(x)$, ou de ces deux fonctions; pour que l'équation admette des solutions de la forme $y=(x-x_0)^\alpha \sum_0^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$, non nulles, il faut et il suffit que les produits $(x-x_0)\,A(x)$ et $(x-x_0)^2\,B(x)$ admettent des limites finies quand x tend vers x_0.

Une équation remplissant ces conditions est dite **du type de Fuchs** au point x_0. Par exemple, l'équation de Bessel (E_λ) $y''+\dfrac{y'}{x}+\left(1-\dfrac{\lambda^2}{x^2}\right)y=0$ est du type de Fuchs au point $x=0$, puisque $\lim\limits_{x\to 0} xA(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0} x^2 B(x)=-\lambda^2$.

3. FONCTIONS ORTHOGONALES. POLYNÔMES ORTHOGONAUX

a) La notion d'orthogonalité, déjà rencontrée à propos des fonctions de Bessel, est liée à celle de produit scalaire. On sait (t. 4) qu'on appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E une application bilinéaire symétrique $(x, y) \longrightarrow \varphi(x, y)$ attachée à une forme quadratique définie positive : en termes plus simples, $\varphi(x, y)$ est un produit scalaire si :

$$\varphi(x, y)=\varphi(y, x), \quad \forall x, y \text{ éléments de } E$$
$$\varphi(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2, y)=\lambda_1 \varphi(x_1, y)+\lambda_2 \varphi(x_2, y)$$
$$\varphi(x, x)=0 \Longrightarrow x=0$$
$$x\neq 0 \Longrightarrow \varphi(x, x)>0$$

On définit aussi $\|x\|=\sqrt{\varphi(x, x)}$, norme de x attachée au produit scalaire φ.

Par définition $\varphi(x, y)=0 \iff x$ orthogonal à y.

b) Soit alors E l'espace vectoriel des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, et $\rho(t)$ une fonction positive, élément de E. Il est facile de vérifier que l'application $(f, g) \longrightarrow \int_a^b \rho(t)\,f(t)\,g(t)\,dt$

$(a<b)$ est un produit scalaire, associé à la fonction $\rho(t)$ et à l'intervalle $[a, b]$ donnés. Nous dirons donc que deux fonctions f et g sont orthogonales sur $[a, b]$ relativement au « poids » ou à la « densité » $\rho(t)$, si

$$\int_a^b \rho(t) \cdot f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

Une suite de fonctions continues $f_n(t)$, deux à deux distinctes est une suite (ou une famille) de fonctions orthogonales, de densité $\rho(t)$ sur $[a, b]$, si $\forall n, p$ entiers distincts $\boxed{\int_a^b \rho(t)\, f_n(t)\, f_p(t)\, \mathrm{d}t = 0}$

Exemple.

Les fonctions $\cos nt$ constituent un système orthogonal, de densité 1, sur tout intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi]$. Les fonctions $J_\lambda(\alpha_n t)$, où les α_n sont les zéros de $J_n(lt)$, constituent un système orthogonal de densité t, sur $[0, l]$. Un tel système est dit orthonormé si $\|f_n(t)\| = 1$.

c) En particulier une famille de polynômes $P_n(t)$, de degré n, est une famille orthogonale sur $[a, b]$, de densité $\rho(t)$ si :

$$\forall n > k \geqslant 0, \qquad \int_a^b \rho(t)\, P_n(t)\, P_k(t) = 0$$

Remarquons que tous ces polynômes sont non nuls puisque

$$\int_a^b \rho(t)\, P_n^2(t)\, \mathrm{d}t > 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$P_0(t) = a_0 \neq 0 \Longrightarrow \int_a^b \rho(t)\, P_n(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

$$P_1(t) = b_0 + b_1 t, \qquad b_1 \neq 0 \Longrightarrow \int_a^b \rho(t) \cdot t P_n(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

Un raisonnement par récurrence très simple montre que, pour tout k entier $\leqslant n-1$, $\int_a^b \rho(t) \cdot t^k P_n(t)\, \mathrm{d}t = 0$, donc $P_n(t)$ est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur à n. La réciproque est immédiate : une famille de polynômes $P_n(t)$, telle que tout polynôme de cette famille soit orthogonal à tout polynôme de degré inférieur, sur $[a, b]$, par rapport à la densité $\rho(t)$, est une famille orthogonale sur $[a, b]$ par rapport à $\rho(t)$.

En outre on peut établir que $P_n(t)$ change de signe n fois sur $]a, b[$, autrement dit les zéros de $P_n(t)$ sont distincts et appartiennent à $]a, b[$.

d) Certaines fonctions $f(t)$, définies sur $[a, b]$ et satisfaisant à des conditions que nous n'approfondirons pas, peuvent être développées en série suivant une famille de fonctions orthogonales $f_n(t)$, sur $[a, b]$, de

poids $\rho(t)$ et si nous admettons l'intégrabilité terme à terme d'une telle série :

$$f(t)=\sum_{0}^{+\infty} c_n f_n(t) \Longrightarrow \int_a^b \rho(t)\, f(t)\, f_k(t)\, \mathrm{d}t$$

$$=\sum_{0}^{+\infty} c_n \int_a^b \rho(t)\, f_k(t)\, f_n(t)\, \mathrm{d}t$$

$$=c_k \int_a^b \rho(t)\, f_k^2(t)\, \mathrm{d}t = c_k \|f_k(t)\|^2$$

d'où le calcul des coefficients.

On voit que de telles séries généralisent les séries de Fourier, où la suite de fonctions orthogonales est constituée par les $e^{in\omega t}$, sur $\left[0,\ T=\frac{2\pi}{\omega}\right]$, avec $\rho(t)=1$.

4. ÉQUATION ET FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

On appelle équation hypergéométrique une équation différentielle de la forme :

$$x(x-1)\, y''+[(a+b+1)\, x-c]\, y'+aby=0$$

où a, b, c sont des réels, c n'étant pas entier négatif.

En isolant y'', on voit que les pôles de $A(x)$ et $B(x)$ sont 0 et 1, et on vérifie que l'équation est du type de Fuchs en ces deux points.

Tout d'abord, nous chercherons directement une solution $\sum_{0}^{+\infty} a_n x^n$, et un calcul de forme classique fournit la relation de récurrence

$$n(n+c-1)\, a_n=(n+a-1)(n+b-1)\, a_{n-1}, \quad \text{avec } a_0 \text{ arbitraire.}$$

En prenant $a_0=1$, on obtient la fonction hypergéométrique de Gauss associée à a, b, c :

$$F(a,\ b,\ c,\ x)=1+\frac{ab}{c}\, x+\frac{a(a+1)\, b(b+1)}{2!\, c(c+1)}\, x^2+\ldots$$
$$+\frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)\, b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!\, c(c+1)\ldots(c+n-1)}\, x^n+\ldots$$

fonction définie sur $]-1, +1[$, car le rayon de convergence de cette série est $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|=1$*.

En posant maintenant $y=x^\alpha z$, un calcul facile mais assez long montre que x se factorise dans le premier membre de l'équation donnant z lorsque $\alpha=1-c$. Si $c\neq 1$, cette équation donne, *a priori*, de nouvelles solutions $y=x^{1-c}z$ où z vérifie l'équation :

$$x(x-1)z''+[(a+b-2c+3)x+c-2]z'+(a-c+1)(b-c+1)z=0$$

Or cette équation est encore du type hypergéométrique; en posant $a-c+1=\alpha$, $b-c+1=\beta$, $2-c=\gamma$, elle admet les solutions $\mu F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

On connaît alors la solution générale de l'équation hypergéométrique sous la forme :

$$y=\lambda F(a, b, c, x)+\mu x^{1-c}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x)$$

Pour $c=1$, la solution générale ne s'exprime pas sous forme de série entière.

Les fonctions hypergéométriques ont pour cas particuliers de nombreuses fonctions élémentaires :

pour $a=b=c=1$, $\quad F(1, 1, 1, x)=\dfrac{1}{1-x}$ (série géométrique)

$a=-\alpha$, $\quad b=c=1$, $\quad F(-\alpha, 1, 1, x)=(1-x)^\alpha$

On pourra aussi vérifier que $F\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -x^2\right)=\dfrac{\text{Arc tg } x}{x}$

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right)=\frac{\text{Arc sin } x}{x}.$$

5. ÉQUATION DE LEGENDRE. FONCTIONS ET POLYNÔMES DE LEGENDRE

a) On appelle équation de Legendre d'ordre λ (réel donné) l'équation différentielle

$$\boxed{(1-x^2)y''-2xy'+\lambda(\lambda+1)y=0}$$

* Le lecteur pourra étudier le cas $|x|=1$ par la règle de Duhamel.

Ses solutions sont, dans leur ensemble, les fonctions de Legendre, appelées aussi fonctions sphériques parce que l'on rencontre certaines d'entre elles dans la répartition des potentiels newtoniens sur une sphère.

b) Dans le cas général, la méthode déjà utilisée dans les équations hypergéométriques et de Bessel, consistant à poser $y=x^{\alpha}\sum_{0}^{+\infty} a_n x^n$, fournit la solution générale de l'équation de Legendre sous la forme :

$$y=aU_{\lambda}(x)+bV_{\lambda}(x)$$

où
$$U_{\lambda}(x)=1-\frac{\lambda(\lambda+1)}{2!}x^2+\frac{\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda+3)}{4!}x^4+\ldots$$
$$+(-1)^n\frac{\lambda(\lambda-2)\ldots(\lambda-2n+2)(\lambda+1)(\lambda+3)\ldots(\lambda+2n-1)}{(2n)!}x^{2n}+\ldots,$$
$$V_{\lambda}(x)=x-\frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{3!}x^3+\frac{(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2)(\lambda+4)}{5!}x^5+\ldots$$
$$+(-1)^n\frac{(\lambda-1)(\lambda-3)\ldots(\lambda-2n+1)(\lambda+2)(\lambda+4)\ldots(\lambda+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$
$$+\ldots$$

chacune de ces séries ayant pour rayon de convergence 1.

c) Pour $\lambda=k$, entier naturel, $U_{\lambda}(x)$ ou $V_{\lambda}(x)$, suivant la parité de k, a ses termes nuls à partir d'un certain rang, donc se réduit à un polynôme. Ce polynôme, à un coefficient près que nous préciserons plus loin, est le polynôme de Legendre d'ordre k.

Si k est pair, le dernier terme non nul de $U(x)$ est

$$(-1)^{\frac{k}{2}}\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot k(k+1)(k+3)\ldots(2k-1)}{k!}$$

Si k est impair, le dernier terme non nul de $V_k(x)$ est :

$$(-1)^{\frac{k-1}{2}}\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots(k-1)(k+2)(k+4)\ldots(2k-1)}{k!}x^k$$

On obtient donc dans les deux cas un polynôme de degré k.

Pour préciser le choix du coefficient, envisageons la fonction $z=(x^2-1)^n$. Elle vérifie l'équation différentielle

$$(1-x^2)z''+2(n-1)xz'+2nz=0$$

Dérivons n fois cette équation, en utilisant la formule de Leibniz : on obtient

$$(1-x^2)z^{(n+2)}-2nxz^{(n+1)}-2C_n^2z^{(n)}+2(n-1)[xz^{(n+1)}+nz^{(n)}]$$
$$+2nz^{(n)}=0$$

ou
$$(1-x^2)z^{(n+2)}-2xz^{(n+1)}+n(n+1)z^{(n)}=0$$

On voit que $z^{(n)}=y$ est solution de $(1-x^2)\,y''-2xy'+n(n+1)\,y=0$, or c'est un polynôme de degré n, il est de l'une des formes $\alpha U_n(x)$ ou $\alpha V_n(x)$.

Ainsi nous appellerons polynôme de Legendre d'ordre n le polynôme $kz^{(n)}$, k étant choisi de façon que $kz^{(n)}(1)=1$. Or en appliquant la formule de Leibniz à $[(x-1)^n(x+1)^n]^{(n)}$, on voit que le seul terme ne contenant pas $x-1$ en facteur est $[(x-1)^n]^{(n)}(x+1)^n$ donc $z^{(n)}(1)=n!\,2^n$, et $k=\dfrac{1}{2^n n!}$.

On obtient ainsi la définition la plus simple du polynôme de Legendre d'ordre n, noté $P_n(x)$:

$$\boxed{P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n}$$

(formule de Rodriguès).

Sur cette formule, comme sur les formes $\alpha U_n(x)$ ou $\alpha V_n(x)$, on constate que $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$.

d) Nous allons établir que les polynômes de Legendre constituent une famille de polynômes orthogonaux, de poids 1, sur $[-1, +1]$. Il suffit de montrer que $I(p)=\displaystyle\int_{-1}^{+1} x^p \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x=0$ pour p entier $<n$.

En intégrant par parties, on obtient :

$$I(p)=\left[x^p\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1}-p\int_{-1}^{1}x^{p-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\cdot\mathrm{d}x.$$

Or $\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n$ contient x^2-1 en facteur, donc

$$I(p)=-p\int_{-1}^{1}x^{p-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x$$

En intégrant encore $p-1$ fois par parties, on arrive, à un coefficient près, à

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{n-p}}{\mathrm{d}x^{n-p}}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\mathrm{d}^{n-p+1}}{\mathrm{d}x^{n-p+1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1}=0$$

donc $I(p)=0$. Il en résulte l'orthogonalité annoncée.

On pourra donc, dans certaines conditions, développer une fonction définie sur $[-1, +1]$ en une série de polynômes de Legendre :

$$f(x)=\sum_{0}^{+\infty}c_n P_n(x) \qquad (1)$$

avec $$c_n = \frac{1}{\|P_n(x)\|^2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx$$

Le calcul de

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\, dx$$

donne, par une suite d'intégration par parties analogues aux précédentes,

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\, dx$$

soit en posant $x = \sin\theta$,

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta\, d\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot 2 \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1},$$

d'où $c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx$.

Nous admettrons que le développement $\sum_0^{+\infty} c_n P_n(x)$ converge, en tout point de $[-1, +1]$ vers $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, pourvu que f soit à variation bornée et que le produit $f(x)\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}$ soit absolument intégrable sur $[-1, +1]$. Remarquons encore que, d'après la théorie générale des polynômes orthogonaux, $P_n(x)$ a ses n racines réelles et appartenant à $]-1, +1[$.

d) Enfin, on démontre, et nous admettrons, la formule suivante :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_0^{+\infty} P_n(x)\, t^n} \quad \text{pour } |x| \leqslant 1;\ |t| < 1$$

On exprime ceci en disant que $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$ est la fonction génératrice des polynômes de Legendre.

Notons encore les valeurs des cinq premiers polynômes de Legendre, faciles à obtenir aussi bien par la formule de Rodriguès que par la fonction génératrice :

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$$

Une formule de récurrence sera proposée en exercice :

$$nP_n(x)-(2n-1)\,xP_{n-1}(x)+(n-1)\,P_{n-2}(x)=0$$

6. POLYNÔMES D'HERMITE

On peut définir directement les polynômes d'Hermite à partir d'un problème de dérivée d'ordre n, classique à un niveau élémentaire : soit $f(x)=e^{-x^2}$ fonction souvent rencontrée dans les chapitres précédents.

On a $f'(x)=-2xe^{-x^2}$, $f''(x)=(4x^2-2)\,e^{-x^2}$,

$$f''(x)=-(8x^3-12x)\,e^{-x^2}.$$

Un raisonnement par récurrence très simple permet de généraliser cette forme : si nous supposons $f^{(n-1)}(x)=(-1)^{n-1}\,H_{n-1}(x)\,e^{-x^2}$ H_{n-1} étant un polynôme de degré $n-1$ et de la parité de $n-1$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}[H'_{n-1}(x)\,e^{-x^2}-2xH_{n-1}(x)\,e^{-x^2}]$$
$$=(-1)^n\,H_n(x)\,e^{-x^2},$$

avec
$$H_n(x)=-H'_{n-1}(x)+2xH_{n-1}(x) \qquad (2)$$

H_n est bien un polynôme de degré n et de la parité de n.

Si, d'autre part, nous appliquons à $f'(x)=-2xf(x)$ la formule de Leibniz à l'ordre $n-1$, nous obtenons :

$$f^{(n)}(x)=-2x^{(n-1)}(x)-2(n-1)\,f^{(n-2)}(x)$$

soit
$$H_n(x)=2x\,H_{n-1}(x)-2(n-1)\,H_{n-2}(x) \qquad (3)$$

(2) et (3) donnent donc $H'_{n-1}(x)=2(n-1)\,H_{n-2}(x)$

ou :
$$H'_n(x)=2nH_{n-1}(x) \qquad (4)$$

Nous allons former à partir de (3) et (4) une relation entre $H_n(x)$ et ses dérivées :

(3) $\Longrightarrow$ $H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$

$$H'_{n+1}(x)=2H_n(x)+2xH'_n(x)-2nH'_{n-1}(x)$$

(4) $\Longrightarrow$ $H'_{n+1}(x)=2(n+1)\,H_n(x)$, et $2nH'_{n-1}(x)=H''_n(x)$

d'où
$$2H_n(x)+2xH'_n(x)-H''_n(x)=2(n+1)\,H_n(x)$$

et
$$H''_n(x)-2xH'_n(x)+2nH_n(x)=0$$

Le polynôme $\boxed{H_n(x)=(-1)^n\,e^{x^2}\cdot\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})}$

appelé polynôme d'Hermite d'ordre n, est donc une solution particulière de l'équation différentielle d'Hermite :

$$\boxed{y''-2xy'+2ny=0} \qquad (E_n)\quad n\in\mathbb{N}$$

On retiendra aussi la relation de récurrence des polynômes d'Hermite :

$$H_n(x)=2xH_{n-1}(x)-2(n-1)\,H_{n-2}(x) \qquad (3)$$

Elle montre, en particulier, que le terme de plus haut degré de $H_n(x)$ est $2^n x^n$.

On pourrait, dans (E_n), même lorsque n n'est pas entier, trouver deux solutions particulières indépendantes sous forme de séries entières, et donc la solution générale. Nous n'insisterons pas sur ce point.

Nous admettrons sans démonstration les résultats suivants :

a) $$e^{-t^2+2xt}=\sum_0^{+\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x) \quad \text{pour tous } t \text{ et } x \text{ réels.}$$

On dit que e^{-t^2+2xt} est la fonction génératrice des polynômes d'Hermite.

b) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_n(x)\,H_p(x)\,dx=0,\ p \text{ et } n \text{ entiers distincts.}$$

Autrement dit les polynômes d'Hermite constituent une famille orthogonale sur $]-\infty,+\infty[$, relativement au poids e^{-x^2}. Il s'ensuit que tous leurs zéros sont réels. On peut en outre établir $\|H_n(x)\|^2=2^n n!\sqrt{\pi}$.

7. POLYNÔMES DE LAGUERRE

Dans un souci d'allègement, le plan d'étude qui précède pouvant être repris, nous définirons les polynômes de Laguerre par

$$\boxed{L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})}$$

avec en particulier :

$$L_0(x)=1, \qquad L_1(x)=-x+1, \qquad L_2(x)=x^2-4x+2,$$
$$L_3(x)=-x^3+9x^2-18x+6$$

et nous admettrons les résultats suivants :

a) $L_n(x)$ est solution de l'équation de Laguerre :

$$\boxed{xy''+(1-x)\,y'+ny=0}$$

b) Les $L_n(x)$ vérifient la relation de récurrence :

$$L_n(x)+(x-2n+1)\,L_{n-1}(x)+(n-1)^2\,L_{n-2}(x)=0$$

c) Les $L_n(x)$ admettent pour fonction génératrice $\frac{1}{1-t}\,e^{-\frac{xt}{1-t}}$:

$$\frac{1}{1-t}\,e^{-\frac{xt}{1-t}}=\sum_0^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\,L_n(x)$$

d) Les $L_n(x)$ constituent une famille orthogonale sur $[0, +\infty[$, relativement au poids e^{-x}, c'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,L_n(x)\,L_p(x)\,dx=0, \qquad \text{pour } n \text{ et } p \text{ entiers distincts,}$$

et

$$\|L_n(x)\|^2=\int_0^{+\infty} e^{-x}\,L_n^2(x)\,dx=(n!)^2$$

8. POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV

Ils s'introduisent à partir de l'équation différentielle de Tchebychev

$$(E) \qquad \boxed{(1-x^2)\,y''-xy'+\alpha^2\,y=0} \qquad \alpha \text{ donné } >0.$$

En fait cette équation est élémentaire car un changement de variable convenable la ramène à une équation à coefficients constants. Elle est d'ailleurs du type de Fuchs aux deux points de singularité $x=\pm 1$.

Si $|x|\geqslant 1$, on pose $x=\varepsilon \operatorname{ch} t$, $\varepsilon=\pm 1$, et on arrive à $\frac{d^2y}{dt^2}-\alpha^2\,y=0$.

Le cas usuel est $|x|\leqslant 1$, où on pose $x=\cos t$, $t=\operatorname{Arc}\cos x$, d'où

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\sin t}\,\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}\,\frac{dt}{dx}=\left(\frac{\cos t}{\sin^2 t}\,\frac{dy}{dt}-\frac{1}{\sin t}\,\frac{d^2y}{dt^2}\right)\left(-\frac{1}{\sin t}\right)$$

d'où après réduction l'équation $\frac{d^2y}{dt^2}+\alpha^2\,y=0$.

Si $\alpha=0$, la solution générale est $y=\lambda t+\mu=\lambda \operatorname{Arc}\cos x+\mu$.

Si $\alpha>0$, c'est

$$y=\lambda\cos\alpha t+\mu\sin\alpha t=\lambda\cos(\alpha \operatorname{Arc}\cos x)+\mu\sin(\alpha \operatorname{Arc}\sin x).$$

Lorsque α n'est pas entier, ces fonctions peuvent s'exprimer par des séries entières que l'on peut obtenir en posant $y=\sum_0^{+\infty} a_n x^n$ dans (E).

Si $\alpha = n$, entier naturel, $\cos(n \text{ Arc cos } x)$ peut s'exprimer sous forme de polynôme en x, en effet

$$\cos nt + i \sin nt = (\cos t + i \sin t)^n$$
$$= \cos^n t + C_n^1 \cos^{n-1} t \cdot i \sin t - C_n^2 \cos^{n-2} t \sin^2 t + \ldots$$
$$+ C_n^{2k} \cos^{n-2k} t \cdot (-1)^k \sin^{2kt} + C_n^{2kt} \cos^{n-2k-1} t \cdot (-1)^k i \sin^{2k+1} t$$
$$+ \ldots + C_n^n i^n \sin^n t.$$

Comme $\sin^2 t = 1 - x^2$,

$$\cos(n \text{ Arc cos } x) = x^n - C_n^2 x^{n-2}(1-x^2) + C_n^4 x^{n-4}(1-x^2)^2 - \ldots$$
$$+ (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k}(1-x^2)^k + \ldots$$

Par définition, ce polynôme s'appelle polynôme de Tchebychev d'ordre n, et se note

$$\boxed{T_n(x) = \cos(n \text{ Arc cos } x)}$$

$$T_n(x) = x^n - C_n^2 x^{n-2}(1-x^2) + C_n^4 x^{n-4}(1-x^2)^2 - \ldots$$

$$= \sum_{0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}} (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k}(1-x^2)^k$$

On trouve en outre

$$\sin(n \text{ Arc cos } x) = \sqrt{1-x^2}\,[C_n^1 x^{n-1} - C_n^3 x^{n-3}(1-x^2)$$
$$+ C_n^5 x^{n-5}(1-x^2)^2 - \ldots]$$

Le polynôme entre crochets, de degré $n-1$, se nomme polynôme de Tchebychev de seconde espèce, d'ordre $n-1$, de sorte que l'on définit le polynôme de Tchebychev de seconde espèce, d'ordre n, par :

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \text{ Arc cos } x]}{\sqrt{1-x^2}} = C_{n+1}^1 x^n - C_{n+1}^3 x^{n-2}(1-x^2)$$
$$+ C_{n+1}^5 x^{n-4}(1-x^2)^2 - \ldots$$

Ainsi la solution générale de l'équation de Tchebychev d'ordre n s'écrit

$$y = \lambda T_n(x) + \mu \sqrt{1-x^2}\, U_{n-1}(x)$$

Les $U_n(x)$ sont assez peu usités. En revanche, les $T_n(x)$ sont d'usage courant et donnent lieu à des considérations analogues à celles des paragraphes précédents, découlant en partie de résultats déjà vus en cours ou en exercices sur les fonctions cos nt. Ainsi il est facile de vérifier, par une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$, et par deux séries géométriques, que

$$\frac{1 - t\cos\theta}{1 - 2t\cos\theta + t^2} = \sum_0^{+\infty} t^n \cos n\theta \qquad |t| < 1.$$

Il en résulte, en posant $\cos\theta = x$,

$$\boxed{\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_0^{+\infty} T_n(x)\, t^n} \quad |t|<1, \quad |x|\leqslant 1.$$

On dira évidemment que la fonction $\dfrac{1-tx}{1-2tx+t^2}$ est la fonction génératrice des polynômes de Tchebychev.

Les relations $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$ et $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos n\theta \cos p\theta \, d\theta = 0$, si p et n entiers distincts, donnent aussitôt la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

et la relation d'orthogonalité sur $[-1, +1]$ avec la densité $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\, T_p(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 0, \; p \text{ et } n \text{ étant entiers distincts.}$$

De plus $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 n\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}$ si $n \geqslant 1$

$= \pi$ si $n = 0$

entraîne $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2}$ si $n \geqslant 2$

$= \pi$ si $n = 0$.

Le développement d'une fonction paire en série de Fourier

$$F(\theta) = \sum_0^{+\infty} a_n \cos n\theta$$

donne, en prenant pour variable $\cos\theta = x$, le développement sur $[-1, +1]$ d'une fonction à variation bornée en série de polynômes de Tchebychev :

$$f(x) = \sum_0^{+\infty} a_n T_n(x)$$

avec $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$, $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\, T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

Notons encore que $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$, $T_2(x)=2x^2-1$, $T_3(x)=4x^3-3x$, $T_4(x)=8x^4-8x^2+1$, ...

et aussi que $$T_x(--x)=(-1)^n\, T_n(x)$$

Enfin, de l'orthogonalité résulte le fait que $T_n(x)$ a ses n zéros réels et appartenant à $]-1, +1[$.

9. POLYNÔMES ET NOMBRES DE BERNOULLI

a) L'origine des polynômes de Bernoulli n'est pas liée à une équation différentielle, mais à une construction par récurrence : on se donne le polynôme

$$P_1(x)=x-\frac{1}{2}$$

à partir duquel on construit les polynômes successifs $P_2(x)$, $P_3(x)$... en leur imposant, pour $n\geqslant 2$,

$$P_n'(x)=P_{n-1}(x), \quad P_n(1)=P_n(0).$$

On peut vérifier de proche en proche que ces conditions suffisent à déterminer la suite des polynômes de Bernoulli $P_n(x)$.

Ainsi $$P_2(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\lambda, \quad \lambda=\text{constante}$$

$P_2(1)=P_2(0)$, pour tout λ, mais si nous écrivons

$$P_3(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\lambda x+\mu$$

$P_3(1)=P_3(0)=\mu$ donne $\lambda=\frac{1}{12}$, et

$$P_2(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{12}$$

La même méthode, utilisant la relation $P_4(1)=P_4(0)$, donnerait la constante d'intégration dans $P_3(x)$, et ainsi de suite.

On trouve ainsi les premières valeurs :

$$P_1(x)=x-\frac{1}{2}, \qquad P_2(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{12}, \qquad P_3(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{12},$$

$$P_4(x)=\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{24}-\frac{1}{720}, \text{ etc.}$$

On peut démontrer, et nous l'admettrons, que $P_n(x)$ est une fonction paire de $u=x-\frac{1}{2}$, si n est pair; une fonction impaire de u, si n est impair.

De plus, on établit facilement que, pour $n \geqslant 1$, $P_{2n+1}(0) = 0$.

Nous admettrons aussi que $\dfrac{te^{tx}}{e^t - 1} = 1 + \sum_1^{+\infty} t^n P_n(x)$.

Les polynômes de Bernoulli ont pour fonction génératrice $\dfrac{te^{tx}}{e^t - 1}$.

b) $P_n(x)$ désignant toujours le polynôme de Bernoulli de degré n, on définit les nombres de Bernoulli B_n par la relation

$$B_n = (-1)^{n-1}(2n)!\ P_{2n}(0) \qquad (n \geqslant 1)$$

de sorte que ce sont aussi les coefficients définis par le développement en série entière :

$$\boxed{\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_1^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} x^{2n}}$$ valable quel que soit t.

On obtient donc facilement les B_n par développement de $\left(1 + \dfrac{t}{2!} + \dfrac{t^2}{3!} + \ldots + \dfrac{t^{n-1}}{n!} + \ldots\right)^{-1}$ du moins pour les premières valeurs numériques de n.

D'autre part en écrivant $\dfrac{t}{e^t - 1} = -\dfrac{t}{2} + \dfrac{t}{2}\dfrac{e^t + 1}{e^t - 1}$, et en posant $t = 2iu$, on obtient

$$1 - iu - \sum_1^{+\infty} \frac{B_n}{(2n)!} 2^{2n} u^{2n} = -iu + iu \cdot \frac{\cos u}{i \sin u}$$

$$= -iu + u \operatorname{cotg} u \qquad u \neq k\pi$$

d'où en prenant les parties réelles (u étant supposé réel) :

$$u \operatorname{cotg} u = 1 - \sum_1^{+\infty} \frac{B_n}{(2n)!} 2^{2n} u^{2n}$$

Cette relation peut s'écrire comme développement de cotg u en série de Laurent :

$$\boxed{\operatorname{cotg} u = \frac{1}{u} - \sum_1^{+\infty} \frac{B_n}{(2n)!} 2^{2n} u^{2n-1}} \qquad (5)^*$$

---

* Nous avons adopté ici les conventions les plus usuelles sur les polynômes et les nombres de Bernoulli, mais il y a des variantes, par exemple $B_n = n!\ P_n(0)$.

Nous verrons dans un exercice que le développement permet de calculer les valeurs des sommes $S_{2k}=\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}$, pour $k\in\mathbb{N}$, généralisant ainsi les formules déjà obtenues en diverses occasions, $\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$. Il s'agit des valeurs numériques pour $x=2k$, entier positif pair, de la fonction « zêta » de Riemann définie par $\zeta(x)=\sum_{1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$, $x>1$.

10. AUTRES FONCTIONS CLASSIQUES

Rappelons

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } x=\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \\ \text{Ci } x=\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,dt\end{array}}$$

(sinus intégral)

(cosinus intégral)

De façon analogue on définit la **fonction d'erreur,** notée Erf (de *error function*) :

$$\boxed{\text{Erf } x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt}$$

avec $\text{Erf}(+\infty)=1$ (Gauss)

et les fonctions de Fresnel $S(x)$ et $C(x)$ définies par

$$\boxed{S(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \sin t^2\,dt} \qquad \boxed{C(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \cos t^2\,dt}$$

avec $S(+\infty)=C(+\infty)=\frac{1}{2}$.

11. INTÉGRALES ET FONCTIONS ELLIPTIQUES

a) Nous terminerons ce chapitre « énumératif » (qui ne prétend pas être exhaustif quant aux très nombreuses fonctions utilisées par les physiciens) par des notions sommaires sur les intégrales elliptiques.

Il s'agit, à l'origine, d'intégrales rencontrées à propos de la rectification de l'ellipse, dont on sait qu'elle n'est pas possible par les fonctions élémentaires : dans l'ellipse d'équations paramétriques $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, où $a>b>0$, $c^2=a^2-b^2$, et où l'origine est placée au point $t=0$, l'abscisse curviligne du point $M(t)$ est

$$s(t)=\int_0^t \sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=a\int_0^t \sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

où $\frac{c}{a}=k\in]0,1[$.

Cette intégrale peut se calculer par une série entière par rapport à la variable $k^2\cos^2 t=u$, puisque $|u|<1$, et en utilisant les intégrales de Wallis.

Nous verrons en exercice un calcul analogue concernant la période des oscillations entretenues d'un pendule simple, qui fait intervenir une intégrale de la forme $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$.

b) D'une façon générale, on appelle intégrale elliptique de première espèce, la fonction :

$$\boxed{F(k,t)=\int_0^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}} \quad 0<k<1$$

intégrale elliptique de seconde espèce, la fonction :

$$\boxed{E(k,t)=\int_0^t \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\cdot\mathrm{d}\theta} \quad 0<k<1.$$

Par changement de variable $x=\sin\theta$, on ramène à ces intégrales les primitives de la forme $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ et $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, où $0<k<1$. On démontre que toute intégrale de la forme $\displaystyle\int f(x,\sqrt{P(x)})\,\mathrm{d}x$, où $P(x)$ est un polynôme du troisième ou du quatrième degré n'ayant que des racines simples, et que l'on appelle encore intégrale elliptique, peut se ramener soit à une intégrale de l'une des formes

$F(k, t)$ et $E(k, t)$, soit, plus rarement dans les cas usuels, à une intégrale elliptique de troisième espèce :

$$\int_0^t \frac{d\theta}{(1+a\sin^2\theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

Les tables usuelles (notamment celles de Murray R. Spiegel, éd. Mc Graw-Hill, déjà citées) ne donnent que des valeurs numériques des intégrales de première et de seconde espèce. On nomme couramment, en particulier, intégrales elliptiques « complètes » de première et de seconde espèce les intégrales définies :

$$K(k)=F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

$$E(k)=E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta \qquad (0<k<1)$$

On utilise aussi la notation $K'(k)$ pour désigner l'intégrale $K(k')$ associée à la valeur $k'=\sqrt{1-k^2}$, autrement dit :

$$K'(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-(1-k^2)\sin^2\theta}}.$$

c) En l'absence de table numérique, on peut calculer une intégrale elliptique de première espèce $F(k, t)=\int_0^t \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$, $0<t<\frac{\pi}{2}$, au moyen de la **transformation de Landen** qui consiste à introduire la variable θ_1 telle que $\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin 2\theta_1}{k+\cos 2\theta_1}$

d'où $d\theta=2\,\frac{1+k\cos 2\theta_1}{1+k^2+2k\cos 2\theta_1}\,d\theta_1$

$$1-k^2\sin^2\theta=1-k^2\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}=1-k^2\frac{\sin^2 2\theta_1}{\sin^2 2\theta_1+(k+\cos 2\theta_1)^2}$$

$$=\frac{(1+k\cos 2\theta_1)^2}{1+k^2+2k\cos 2\theta_1}=\frac{(1+k\cos 2\theta_1)^2}{(1+k)^2-4k\sin^2\theta_1}$$

d'où, avec $\operatorname{tg} t=\frac{\sin 2t_1}{k+\cos 2t_1}$

$$F(k, t)=\int_0^{t_1} \frac{2\,d\theta_1}{\sqrt{(1+k)^2-4k\sin^2\theta_1}}=\frac{2}{1+k}\int_0^{t_1} \frac{d\theta_1}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)^2\sin^2\theta_1}}$$

D'où, si nous posons $k_1 = \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}$, la relation

$$F(k, t) = \frac{k_1}{\sqrt{k}} F(k_1, t_1)$$

De même $F(k_1, t_1) = \dfrac{k_2}{\sqrt{k_1}} F(k_2, t_2)$, ...,

$$F(k_{n-1}, t_{n-1}) = \frac{k_n}{\sqrt{k_{n-1}}} F(k_n, t_n)$$

en définissant t_n et k_n au moyen de t_{n-1} et k_{n-1} comme on a défini t_1 et k_1 au moyen de t et k.

Or la suite récurrente $k_0 = k$, $k_n = \dfrac{2\sqrt{k_{n-1}}}{1+k_{n-1}}$ est croissante et majorée par 1, ainsi qu'il est facile de le vérifier par récurrence, donc convergente et a pour limite l tel que $l = \dfrac{2\sqrt{l}}{1+l}$, donc $l = 1$; nous admettrons que la suite définie par $t_0 = t$, $\operatorname{tg} t_n = \dfrac{\sin 2\, t_{n-1}}{k_{n-1} + \cos 2\, t_{n-1}}$ est également convergente, soit T sa limite.

On a alors $F(k, t) = \dfrac{k_1\, k_2 \dots k_n}{\sqrt{k}\sqrt{k_1} \dots \sqrt{k_{n-1}}} F(k_n, t_n)$

$$= \sqrt{\frac{k_1\, k_2 \dots k_n}{k}}\, F(k_n, t_n).$$

Or la suite $\prod_1^n k_p$ est elle aussi convergente, car de même nature que la série de terme général $u_n = \operatorname{Log} k_n \sim k_n - 1$, avec $|k_n - 1| \leqslant \lambda^{n-n_0} |k_{n_0} - 1|$ où λ est un majorant de la dérivée de $\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$ sur $[k_{n_0}, 1]$; cette dérivée $\dfrac{1-x}{(1+x)^2\sqrt{x}}$ tend vers 0 quand x tend vers 1, on a donc $\lambda < 1$ et la série considérée converge. On a donc

$$F(k, t) = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\prod_1^{+\infty} \sqrt{k_n} \right) F(1, T)$$

$$\text{avec } F(1, T) = \int_0^T \frac{d\theta}{\cos \theta} = \operatorname{Log} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{T}{2} \right)$$

ce qui permet un calcul approché de $F(k, t)$.

Un autre calcul approché est fourni par une série (voir exercice).

d) Dans l'intégrale elliptique de première espèce,

$$\boxed{u=\int_0^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}}$$

$u'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}>0$ montre que u est une fonction monotone de t, il existe donc une fonction inverse $t=f(u)$. Cette fonction, liée au nombre k donné, s'appelle amplitude de u et s'écrit

$$\boxed{t=am\,u}$$

am u est une fonction elliptique, d'où on construit trois autres fonctions elliptiques :

$$\boxed{\begin{aligned}\sin t&=\sin(am\,u)=\mathrm{sn}\,u\\ \cos t&=\cos(am\,u)=\mathrm{cn}\,u\\ \sqrt{1-k^2\sin^2 t}&=\mathrm{d}n\,u.\end{aligned}}$$

(fonctions elliptiques de Jacobi, de module k)

Nous n'insisterons pas sur ces fonctions, qui présentent des analogies avec les fonctions trigonométriques.

Résumé du chapitre 6

- **Théorème de Fuchs.**

x_0 étant un pôle de $A(x)$ ou de $B(x)$ dans l'équation différentielle

$$y''+A(x)\,y'+B(x)\,y=0,$$

pour que cette équation ait des solutions non nulles de la forme $y=(x-x_0)^\alpha\sum_0^{+\infty}a_n(x-x_0)^n$, il faut et il suffit que les produits $(x-x_0)\,A(x)$ et $(x-x_0)^2\,B(x)$ admettent des limites finies quand x tend vers x_0.

- Une **suite de fonctions** continues $f_n(t)$ est **dite orthogonale,** de densité $\rho(t)$, sur $[a, b]$, si

$$\forall n, p \text{ entiers distincts}, \quad \int_a^b \rho(t)\,f_n(t)\,f_p(t)\,\mathrm{d}t=0$$

• Pour qu'une **famille de polynômes** $P_n(t)$, de degré n, soit **orthogonale** de densité $\rho(t)$ sur $[a, b]$, il faut et il suffit que :

$$\forall k \text{ entier } \leqslant n-1 \quad \int_a^b \rho(t)\, P_n(t)\, dt = 0$$

Alors les n zéros de $P_n(t)$ sont distincts et appartiennent à $[a, b[$.

• **Equation hypergéométrique.**

$$x(x-1)\, y'' + [(a+b+1)\, x - c]\, y' + aby = 0$$

(a, b, c réels; c non entier négatif).

Une de ses solutions est la fonction hypergéométrique :

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{ab}{c}\, x + \frac{a(a+1)\, b(b+1)}{2!\, c(c+1)}\, x^2 + \ldots + \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)\, b(b+1)\ldots(b+n-1)}{n!\, c(c+1)\ldots(c+n-1)}\, x^n + \ldots$$

définie sur $]-1, +1[$.

• **Équation de Legendre d'ordre λ.**

$$(1-x^2)\, y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)\, y = 0$$

Pour $\lambda = n$, entier positif, une solution de cette équation est

$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n\, n!}\, \dfrac{d^n}{dx^n}\, (x^2-1)^n$, polynôme de Legendre de degré n.

Les polynômes de Legendre constituent une famille orthogonale de densité 1 sur $[-1, +1]$. Ils ont pour fonction génératrice $\dfrac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$ car

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^3}} = \sum_0^{+\infty} P_n(x)\, t^n, \quad |x| \leqslant 1, \quad |t| < 1.$$

• On appelle **polynôme d'Hermite** de degré n le polynôme :

$$H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2}\, \frac{d^n}{dx^n}\, (e^{-x^2})$$

solution de l'équation d'Hermite $y'' - 2xy' + 2ny = 0$.

Les polynômes d'Hermite constituent une famille orthogonale de densité e^{-x^2} sur $]-\infty, +\infty[$.

Fonction génératrice : $e^{-t^2+2xt} = \sum_0^{+\infty} \dfrac{t^n}{n!}\, H_n(x)$.

• **Polynômes de Laguerre.**

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

Solution de l'équation de Laguerre : $xy''+(1-x)\,y'+ny=0$

Fonction génératrice : $\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}=\sum_0^{+\infty}\frac{t^n}{n!}L_n(x)$

Les $L_n(x)$ constituent une famille orthogonale de densité e^{-x} sur $[0, +\infty[$.

• **Équation de Tchebychev.**

$$(1-x^2)\,y''-xy'+\alpha^2 y=0$$

Sa solution générale est :

$$y=\lambda \text{ Arc cos } x+\mu \quad \text{si } \alpha=0$$

$$y=\lambda\cos(\alpha \text{ Arc cos } x)+\mu\sin(\alpha \text{ Arc cos } x), \text{ si } \alpha<0$$

ceci pour $|x|<1$.

Pour n entier, $T_n(x)=\cos(n \text{ Arc cos } x)$

$$=x^n-C_n^2x^{n-2}(1-x^2)+C_n^4x^{n-4}(1-x^2)+\ldots$$

est le polynôme de Tchebychev de degré n.

Ces polynômes constituent une famille orthogonale de densité $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, sur $[-1, +1]$.

• Les **polynômes de Bernoulli** $P_n(x)$, n entier $\geqslant 1$, sont définis par :

$$P_1(x)=x-\frac{1}{2};\quad P_n'(x)=P_{n-1}(x);\quad P_n(1)=P_n(0) \text{ pour } n\geqslant 2.$$

$$\text{Fonction génératrice : } \frac{te^{tx}}{e^t-1}=1+\sum_1^{+\infty}t^nP_n(x)$$

$$\text{Nombres de Bernoulli : } B_n=n!\,P_n(0)$$

$$\frac{t}{e^t-1}=1+\sum_1^{+\infty}\frac{B_n}{n!}t^n$$

• **Sinus intégral :** Si $x=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$ Si $(+\infty)=\frac{\pi}{2}$

• **Cosinus intégral :** $\mathrm{Ci}\ x=\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$

• **Fonction d'erreur :** $\mathrm{Erf}\ x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \mathrm{Erf}(+\infty)=1$

• **Fonctions de Fresnel :** $S(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t \quad S(+\infty)=\frac{1}{2}$

$$C(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t \quad C(+\infty)=\frac{1}{2}$$

• **Intégrale elliptique de première espèce.**

$$F(k,t)=\int_0^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad 0<k<1$$

• **Intégrale elliptique de seconde espèce.**

$$E(k,t)=\int_0^t \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$u=\int_0^t \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta \iff t=amu$$

et les fonctions elliptiques de Jacobi sont

$$sn\ u=\sin t, \quad cn\ u=\cos t, \quad \mathrm{d}n\ u=\sqrt{1-k^2\sin^2 t}$$

EXERCICES

■ **1.** En utilisant une équation différentielle vérifiée par

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}=\sum_0^{+\infty} P_n(x)\ t^n=f(t)$$

établir la relation de récurrence des polynômes de Legendre.

On obtient

$$-\frac{1}{2}(2t-2x)(1-2tx+t^2)^{-\frac{3}{2}}=f'(t)=\frac{x-t}{1-2tx+t^2}f(t)$$

d'où : $$(1-2tx+t^2)\,f'(t)=(x-t)\,f(t)$$

$$(1-2tx+t^2)\sum_{1}^{+\infty} nt^{n-1}\,P_n(x)=(x-t)\sum_{0}^{+\infty} t^n\,P_n(x).$$

$$\sum_{1}^{+\infty} nt^{n-1}\,P_n(x)-2x\sum_{1}^{+\infty}(n-1)\,t^{n-1}\,P_{n-1}(x)+\sum_{2}^{+\infty}(n-2)\,t^{n-1}\,P_{n-2}(x)=x\sum_{1}^{+\infty} t^{n-1}\,P_{n-1}(x)-\sum_{2}^{+\infty} t^{n-1}\,P_{n-2}(x).$$

Pour $n=2$ on obtient le terme constant : $P_1(x)=xP_0(x)=x$, car $P_0(x)=1$.

En égalant les coefficients de t^{n-1} pour $n\geqslant 2$, on obtient :

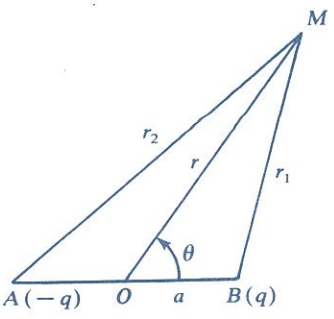
$$nP_n(x)-(2n-1)\,xP_{n-1}(x)+(n-1)\,P_{n-2}(x).$$

■ **2.** Calculer sous forme d'une série de polynômes de Legendre le potentiel électrique résultant, en un point M, de deux charges q et $-q$ placées en deux points A et B tels que $AB=2a$, $OM=r$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OM})=\theta$, O étant milieu de AB; on suppose $a<r$.

Ce potentiel est $U=\dfrac{q}{r_1}-\dfrac{q}{r_2}$

et on a $r_1^2=a^2+r^2-2ar\cos\theta$ $r_2^2=a^2+r^2+2ar\cos\theta$

donc $U=\dfrac{q}{r}\left[\left(1-\dfrac{2a}{r}\cos\theta+\dfrac{a^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-\left(1+\dfrac{2a}{r}\cos\theta+\dfrac{a^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$.



En posant $\frac{a}{r} = t \in]0, 1[\quad \cos\theta = x \in]-1, +1[$

on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+2tx+t^2}} = \sum_0^{+\infty} [P_n(x) - P_n(-x)]\, t^n$$

$$= \sum_0^{+\infty} [1-(-1)^n]\, P_n(x)\, t^n = 2 \sum_0^{+\infty} P_{2n+1}(x)\, t^{2n+1}$$

Soit en revenant aux notations initiales :

$$U = \frac{2q}{r} \sum_0^{+\infty} P_{2n+1}(\cos\theta) \left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1}$$

■ **3.** *a*) α étant un nombre positif non entier, écrire le développement en série de Fourier de la fonction $f(x)$ 2π-périodique, égale sur $[-\pi, +\pi]$ à $\cos \alpha x$.

b) En déduire un développement de cotg u en une série de fractions rationnelles.

c) En développant chacun des termes de la série précédente comme une série géométrique, écrire le développement de cotg u en série entière, pour $|u| < \pi$, en exprimant les coefficients à l'aide des sommes

$$S_{2k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \zeta(2k).$$

d) Exprimer les sommes S_{2k} à l'aide des nombres de Bernoulli. Calculer explicitement S_2, S_4, S_6, S_8. Trouver un équivalent de B_k lorsque $k \longrightarrow +\infty$.

---

a) On obtient $f(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha}{\pi} \sin \alpha\pi \sum_1^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{\alpha^2 - n^2}$.

b) En donnant à x la valeur π et posant $\alpha\pi = u \neq k\pi$ (k entier), on en déduit :

$$\operatorname{cotg} u = \frac{1}{u} + 2u \sum_1^{+\infty} \frac{1}{u^2 - n^2\pi^2}.$$

Cette série, absolument convergente pour tout $u \neq k\pi$, est une décomposition en éléments simples de cotg u suivant ses pôles $\pm n\pi$.

c) Écrivons $\operatorname{cotg} u = \frac{1}{u} - 2u \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{u^2}{n^2\pi^2}}$.

Comme $\left|\frac{u}{n\pi}\right|<1 \ \forall n$ entier $\geqslant 1$:

$$\frac{1}{1-\frac{u^2}{n^2\pi^2}}=\sum_{k=0}^{k=\infty}\left(\frac{u^2}{n^2\pi^2}\right)^k$$

de sorte que $\operatorname{cotg} u=\frac{1}{u}-2u\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{u^{2k}}{n^{2k+2}\pi^{2k+2}}\right)$

$$=\frac{1}{u}-2u\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{u^{2k-2}}{n^{2k}\pi^{2k}}\right).$$

Il s'agit de séries positives convergentes, on peut donc intervertir les sommations et écrire :

$$\operatorname{cotg} u=\frac{1}{u}-\sum_{k=1}^{+\infty}u^{2k-1}\left(\frac{2}{\pi^{2k}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}\right)$$

donc, avec $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}=S_{2k}$ $\operatorname{cotg} u=\frac{1}{u}-\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2S_{2k}}{\pi^{2k}}u^{2k-1}\right)$

d) En comparant ce résultat à la formule établie dans le cours :

$$\operatorname{cotg} u=\frac{1}{u}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{B_k}{(2k)!}2^{2k}u^{2k-1}$$

on constate que $\frac{2S_{2k}}{\pi^{2k}}=\frac{B_k}{(2k)!}2^{2k}$ pour $k\in\mathbb{N}^*$,

donc $$S_{2k}=\frac{\pi^{2k}}{(2k)!}2^{2k-1}B_k$$

Les tables numériques donnent :

$B_1=\frac{1}{6}$ d'où $S_2=\frac{\pi^2}{6}$ déjà vue à plusieurs reprises

$B_2=\frac{1}{30}$ d'où $S_4=\frac{\pi^4}{90}$ déjà vue aussi

$B_3=\frac{1}{42}$ d'où $S_6=\frac{\pi^6}{945}\simeq 1{,}073$

$B_4=\frac{1}{30}$ d'où $S_8=\frac{\pi^8}{9450}\simeq 1{,}004$

Ces valeurs et les suivantes peuvent évidemment aussi être obtenues sans les nombres de Bernoulli en calculant les coefficients du développement de cotg u par division suivant les puissances croissantes de ceux de cos u et de sin u. En outre, en écrivant :

$$\zeta(x)-1=\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots<\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^x}=\frac{1}{x-1} \qquad x>1$$

on démontre que $\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$, donc $\lim_{k\to+\infty}S_{2k}=1$ il en résulte l'équivalence $B_k \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{(2k)!}{\pi^{2k}2^{2k-1}}$.

■ **4.** Établir la relation $P_{n+1}(x+1)-P_{n+1}(x)=\frac{x^n}{n!}$ $n\in\mathbb{N}$.

En déduire une expression, à l'aide des polynômes de Bernoulli P_n, de la somme $s(k, n)=1^n+2^n+3^n+\ldots+k^n$.

Calculer explicitement $s(k, 0)$, $s(k, 1)$, $s(k, 2)$, $s(k, 3)$.

$P_1(x)=x-\frac{1}{2} \Longrightarrow P_1(x+1)-P_1(x)=1$ la relation est vraie pour $n=0$.

En posant : $\quad Q_n(x)=P_{n+1}(n+1)-P_{n+1}(x)$

on a

$$Q'_n(x)=P'_{n+1}(x+1)-P'_{n+1}(x)=P_n(x+1)-P_n(x)=Q_{n-1}(x)$$

et $\quad Q_n(0)=P_{n+1}(1)-P_{n+1}(0)=0 \quad$ si $n\geqslant 1$

donc $\quad Q_n(x)=\int_0^x Q_{n-1}(t)\,dt \quad$ avec $Q_0(x)=1$

on en déduit aussitôt $Q_n(x)=\frac{x^n}{n!}$.

En donnant à x les valeurs 1, 2, ..., k est en ajoutant, on obtient :

$$s(k, n)=n!\,[P_{n+1}(k+1)-P_{n+1}(1)] \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

avec $P_{n+1}(1)=P_{n+1}(0)$ si $n\geqslant 1$.

$$P_1(x)=x-\frac{1}{2} \quad \text{donne} \quad s(k, 0)=k$$

$$P_2(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{12} \quad \text{donne} \quad s(k, 1)=\frac{k(k+1)}{2}$$

$$P_3(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{12} \quad \text{donne} \quad s(k, 2)=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$P_4(x)=\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{24}-\frac{1}{720} \quad \text{donne} \quad s(k, 3)=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

■ **5.** Déterminer les courbes planes C telles que, O étant sur C l'origine des abscisses, la courbure de C en un point M quelconque de C soit proportionnelle à l'abscisse curviligne $\overset{\frown}{OM} = s$. On vérifiera que ces courbes peuvent être paramétrées à l'aide des fonctions C et S de Fresnel. Construire une de ces courbes.

On veut $\frac{1}{R} = \frac{s}{a^2}$, a étant une longueur donnée.

En intégrant la relation $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{a^2}{s}$ et en choisissant O pour origine et la tangente en O pour axe des x, on arrive à :

$$x = a\int_0^{\varphi} \frac{\cos u}{\sqrt{2\,u}}\,\mathrm{d}u \qquad y = a\int_0^{\varphi} \frac{\sin u}{\sqrt{2\,u}}\,\mathrm{d}u$$

soit

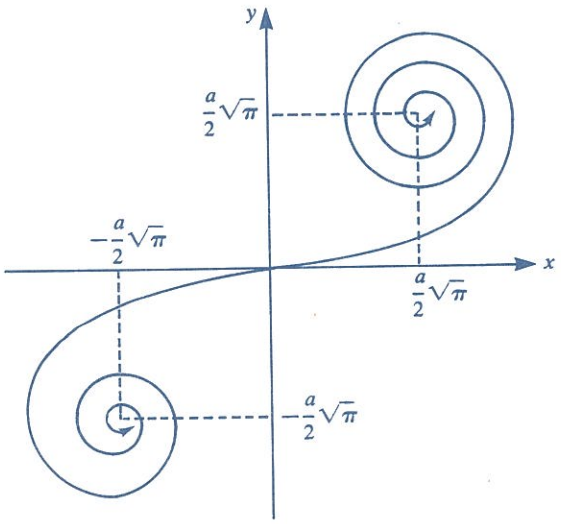
$$x = a\sqrt{2}\int_0^{t} \cos v^2\,\mathrm{d}v = a\sqrt{\pi}\,C(t)$$

$$y = a\sqrt{2}\int_0^{t} \sin v^2\,\mathrm{d}v = a\sqrt{\pi}\,S(t)$$

O est centre de symétrie; $\lim_{t\to+\infty} x = \lim_{t\to+\infty} y = \frac{a}{2}\sqrt{\pi}$ (point asymptote).

Comme $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a\sqrt{2}\cos t^2$ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a\sqrt{2}\sin t^2$ $s = a\sqrt{2}\,t$

x a des extrema pour $t = \sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}$, y pour $t = \sqrt{k\pi}$ et l'allure de la courbe est celle de la figure ci-dessous. Elle est connue sous le nom de spirale de Cornu.



■ **6.** Un pendule M de longueur l, de masse m, est abandonné sans vitesse initiale en un point M_0 d'élongation $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_0})$ A étant sa position d'équilibre et O le point où est suspendu le pendule. On néglige les frottements.

Montrer que l'équation différentielle donnant l'élongation $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ à l'instant t, est $l\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + g \sin\theta = 0$ et déterminer la période du pendule sous forme d'une intégrale elliptique et sous forme de série.

Indications : l'équation ci-dessus s'obtient en projetant la relation $\vec{F} = m\vec{\Gamma}$ sur la tangente en M au cercle, trajectoire de M, ce qui élimine la tension du fil

$$l\theta'' + g \sin\theta = 0 \iff l\theta'\,\theta'' = -g \sin\theta \cdot \theta'$$

$$l\theta'^2 = 2g(\cos\theta - \cos\alpha) = 4g\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$dt = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\theta}{2}}}.$$

La période est la durée d'une oscillation double, donc :

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\theta}{2}}} \qquad \left(0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

Le changement de variable $\sin\dfrac{\pi}{2} = \sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\varphi$ donne :

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} \qquad \text{avec } k = \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

C'est une intégrale elliptique complète de première espèce. Elle peut être calculée à l'aide des tables de $K(k)$, pour α donné, ou exprimée par une série en développant $(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$ suivant $k^2\sin^2\varphi$ et en intégrant; on obtient grâce aux intégrales de Wallis la formule suivante :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\alpha}{2} + \ldots + \left(\frac{1\cdot 3\cdot \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\right)^2\sin^{2n}\frac{\alpha}{2} + \ldots\right].$$

La formule des « petites oscillations » du pendule simple $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ consiste à négliger $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ devant 1. T est une fonction croissante de α.

Remarquons que si le pendule est suspendu par un fil souple, α reste inférieur à $\dfrac{\pi}{2}$, et $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ à $\dfrac{1}{2}$; la série ci-dessus converge rapidement. S'il est

suspendu par une tige rigide, de masse négligeable, on peut admettre que l'élongation initiale α dépasse $\frac{\pi}{2}$ et même soit proche de π, sans toutefois l'atteindre. Quand $\alpha \longrightarrow \pi$, $k \longrightarrow 1$, l'intégrale $K(k) \longrightarrow +\infty$ et la série ci-dessus aussi, car pour $\alpha = \pi$ son terme général est :

$$u_n = \frac{[(2n)!]^2}{2^{4n}(n!)^4} \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} \cdot 4\pi n}{2^{4n}\left(\frac{n}{e}\right)^{4n} \cdot 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{\pi n} \qquad \text{(Stirling)}$$

c'est celui d'une série divergente.

Ainsi $T \longrightarrow +\infty$ lorsque $\alpha \longrightarrow \pi$.

■ **7.** Calculer, en la ramenant à une des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce, les intégrales :

$$A = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad B = \int_0^1 \sqrt{1-x^4}\, dx \quad C = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\, dx$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2-\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \simeq 1{,}311 \qquad \text{(tables)}$$

$$B = \int_0^1 \frac{1-x^4}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = A + \frac{1}{2}\int_0^1 x \cdot \frac{-4x^3\, dx}{2\sqrt{1-x^4}}$$

$$= A + \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^4}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\, dx$$

d'où $B = \frac{2}{3}$ $A \simeq 0{,}874$

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2-\sin^2\varphi}\, d\varphi = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

$$= \sqrt{2}\, E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \simeq 1{,}910.$$

■ **8.** Déterminer les périodes réelles et les dérivées des fonctions elliptiques $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$, de module k.

• $sn\,u = \sin(am\,u) = \sin t$ avec $u = \int_\theta^t \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$.

La période de $sn\,u$ est la valeur U de u telle que $t(u+U)=t+2\pi$ donc

$$U=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=4K$$

Celle de $cn\,u=\cos(am\,u)$ est également $4K$.

Celle de $dn\,u=\sqrt{1-k^2\,sn^2\,u}$ est $2K$ puisque $t(u+2K)=t+\pi$.

• On a $\dfrac{d}{du}sn\,u=\dfrac{d}{dt}\sin t\cdot\dfrac{dt}{du}$ or $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}=\dfrac{1}{dn\,u}$

donc

$$\frac{d}{du}sn\,u=\cos t\,dn\,u=cn\,u\,dn\,u$$

De même

$$\frac{d}{du}cn\,u=-sn\,u\,dn\,u.$$

Enfin

$$\frac{d}{du}dn\,u=-\frac{k^2\,sn\,u\,cn\,u\,dn\,u}{\sqrt{1-k^2\,sn^2\,u}}=-k^2\,sn\,u\,cn\,u.$$

Ces formules rappellent celles concernant les fonctions trigonométriques, dont les fonctions elliptiques sont la généralisation : il est en effet aisé d'observer que si $k=0$, $u=t$, $dn\,u=1$, $sn\,u=\sin u$, $cn\,u=\cos u$.

■ **9.** Calculer, sous forme d'intégrales elliptiques de première ou de seconde espèce, l'abscisse curviligne d'un point M de paramètre t, l'origine étant prise en $t=0$, sur :

a) l'ellipse $x=a\cos t$, $y=b\sin t$;

b) la demi-hyperbole $x=a\,\mathrm{ch}\,t$, $y=b\,\mathrm{sh}\,t$.

---

a)
$$s(t)=\int_0^t\sqrt{a^2\sin^2 u+b^2\cos^2 u}\,du$$
$$=a\int_0^t\sqrt{1-k^2\cos^2 u}\,du,\quad\left(k=\frac{c}{a}\right)$$
$$=a\int_{\frac{\pi}{2}-t}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta=a\left[E(k)-E\left(k,\frac{\pi}{2}-t\right)\right].$$

Longueur totale : $l=4E(k)$.

b)
$$s(t)=\int_0^t\sqrt{a^2\,\mathrm{sh}^2 u+b^2\,\mathrm{ch}^2 u}\,du=\int_0^t\sqrt{c^2\,\mathrm{ch}^2 u-a^2}\,du$$
$(c=\sqrt{a^2+b^2})$

$\mathrm{ch}\,u=\dfrac{1}{\sin\theta}$ donne, après calculs, $s(t)=c\displaystyle\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}{\sin^2\theta}d\theta$

$\left(k=\dfrac{a}{c}\right)$ avec $\theta_0=\mathrm{Arc}\sin\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,t}\right)$ et, en intégrant par parties :

$$s(t)=-c\left[\mathrm{cotg}\,\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\right]-c\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta$$

$$s(t) = c \operatorname{cotg} \theta_0 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_0} - cJ$$

$$s(t) = c (\operatorname{th} t \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - k^2} - J)$$

avec
$$J = \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \frac{1}{k^2}(1 - k^2 \sin^2 \theta) - \frac{1}{k^2}}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \, d\theta$$

$$J = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) [K(k) - K(k, \theta_0)] + \frac{1}{k^2} [E(k) - E(k, \theta_0)]$$

Le problème est ainsi résolu.

CHAPITRE 7

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

A. INTRODUCTION ET GÉNÉRALITÉS

Nous avons, à diverses reprises, rencontré dans les chapitres précédents des équations aux dérivées partielles : il s'agit d'équations fonctionnelles (c'est-à-dire d'équations où l'inconnue est une fonction) contenant une fonction inconnue d'au moins deux variables, une au moins des dérivées partielles de cette fonction, et les variables elles-mêmes. L'ordre d'une telle équation, comme pour une équation différentielle qui n'est autre qu'une équation aux dérivées partielles à une seule variable, est l'ordre de dérivation le plus élevé avec lequel figure la fonction inconnue dans l'équation.

Ainsi l'équation $u(x, y, z)+xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}-z\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$ est une équation aux dérivées partielles du second ordre à trois variables, ou **en dimension 3,** x, y, z pouvant être considérées comme les coordonnées d'un point M.

Divers exemples simples nous ont montré que la solution générale d'une équation aux dérivées partielles d'ordre n semble dépendre de n fonctions arbitraires, remplaçant les constantes d'intégration d'une équation différentielle.

Exemple.

L'équation $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ à 2 variables, admet la solution générale $u(x, y)=f(x+y)+g(x-y)$ (voir exercice 6, chap. 11, t. 1).

D'autre part, nous avons vu, dans le chapitre consacré aux fonctions d'une variable complexe, que l'équation de Laplace à deux variables, $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, admet pour solution générale sur un domaine $\mathbb{D}$ la partie réelle d'une fonction quelconque holomorphe sur $\mathbb{D}$, et la formule intégrale de Cauchy montre qu'une telle fonction est parfaitement connue à l'intérieur d'une courbe fermée C de $\mathbb{D}$, domaine simplement connexe, dès

qu'elle est connue sur C. Il semble donc qu'il existe une solution particulière et une seule coïncidant, sur une courbe donnée en dimension 2, sur une surface donnée en dimension 3, avec une fonction donnée.

B. ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

1. Généralités

La forme générale d'une équation aux dérivées partielles à n variables, du premier ordre, est

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$$

En dimension 2, nous adopterons plus couramment les notations x, y, $z(x, y)$, d'où la forme $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$ ou

$$\boxed{F(x, y, z, p, q) = 0} \tag{1}$$

si l'on adopte les notations de Monge.

La solution générale de (1) est une famille de surfaces, dont souvent (1) exprime une propriété géométrique. Par exemple, l'équation

$$xp + yq - z = 0 \tag{2}$$

a pour solution générale les fonctions homogènes de degré 1, $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ (voir exercice 13, chap. 11, t. 1), les surfaces correspondantes (dites surfaces intégrales de l'équation) sont les cônes de sommet O, et (2) exprime une propriété caractéristique de ces cônes, à savoir que tous les plans tangents passent par le point fixe O.

Une équation aux dérivées partielles à n variables, du premier ordre, est dite linéaire si elle est du premier degré par rapport aux dérivées partielles de la fonction inconnue, c'est-à-dire de la forme

$$\sum_1^n P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = R(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$$

Sa résolution fait en général appel aux systèmes différentiels.

2. Systèmes différentiels. Intégrales premières

Un système différentiel à n fonctions inconnues $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ est un système de la forme $\dfrac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$

Les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants, déjà abordés à propos de la transformation de Laplace, seront étudiés dans le tome 4 en application de la réduction des matrices.

Dans le cas général, en prenant $n = 3$ et $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ coordonnées d'un point $M(t)$, une solution du système

$$\begin{cases} x' = f(x, y, z, t) \\ y' = g(x, y, z, t) \\ z' = h(x, y, z, t) \end{cases}$$

peut être assimilée à une **courbe intégrale** Γ d'équations paramétriques

$$x = \varphi(t, a, b, c), \qquad y = \psi(t, a, b, c), \qquad z = \theta(t, a, b, c) \tag{4}$$

dépendant de trois constantes d'intégration a, b, c que l'on peut en général déterminer si l'on impose à Γ de passer, pour $t = 0$, par le point donné (x_0, y_0, z_0). En admettant que l'on sache résoudre le système (4) par rapport à a, b, c, obtenant ainsi :

$$a = F(x, y, z, t)$$
$$b = G(x, y, z, t)$$
$$c = H(x, y, z, t)$$

on voit apparaître trois fonctions F, G, H de t, x, y, z qui, le long d'une courbe intégrale Γ de (3), restent constantes. Une telle fonction est appelée intégrale première du système (3); par extension la relation $F(x, y, z, t) = c^{te} = a$ s'appelle aussi intégrale première.

Réciproquement, la connaissance de trois intégrales premières **distinctes** ou **indépendantes,** c'est-à-dire telles qu'il n'existe pas de relation

$$\Phi[F(x, y, z, t), G(x, y, z, t), H(x, y, z, t) = 0,$$

détermine les courbes intégrales, donc la solution générale, du système (3).

Exemple.
Du système

$$\frac{dx}{dt} = x(y - z)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(z - x)$$
$$\frac{dz}{dt} = z(x - y)$$

on déduit $\quad dx+dy+dz=0,\ \dfrac{dx}{x}+\dfrac{dy}{y}+\dfrac{dz}{z}=0$

$x+y+z=a$ et $xyz=b$ sont des intégrales premières.

L'achèvement de la résolution conduit à une intégrale elliptique, car

$$(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=(a-z)^2-4\frac{b}{z}$$

donc $\quad \dfrac{dz}{dt}=\pm\sqrt{z^2(z-a)^2-4bz},\ t=\pm\displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{z[z(z-a)^2-4b]}}$

Cependant si on s'intéresse seulement aux trajectoires du point $M(x, y, z)$ et non à la loi horaire de son mouvement (t étant le temps), les deux intégrales premières résolvent le problème : ces trajectoires sont les sections des surfaces $xyz=b$ par des plans perpendiculaires au vecteur $(1, 1, 1)$.

3. Équation aux dérivées partielles associée à un système différentiel linéaire

Revenons au cas général du système

$$\begin{cases} x'=P(x, y, z, t) \\ y'=Q(x, y, z, t) \\ z'=R(x, y, z, t) \end{cases} \tag{5}$$

Si $F(x, y, z, t)=a$ est une intégrale première de (5), on a, pour toute solution de (5) et pour tout t,

$$F[x(t), y(t), z(t), t]=a \quad \text{donc} \quad \frac{dF}{dt}=0$$

c'est-à-dire $\quad \dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}+\dfrac{\partial F}{\partial z}\cdot\dfrac{dz}{dt}+\dfrac{\partial F}{\partial t}=0$

et $$P(x, y, z, t)\frac{\partial F}{\partial x}+Q(x, y, z, t)\frac{\partial F}{\partial y}+R(x, y, z, t)\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial t}=0 \tag{6}$$

Une intégrale première du système (5) est donc solution de l'équation aux dérivées partielles (6), dite associée à (5).

4. Équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre

Soit l'équation aux dérivées partielles linéaire

$$f(x, y, z, u)\frac{\partial u}{\partial x}+g(x, y, z, u)\frac{\partial u}{\partial y}+h(x, y, z, u)\frac{\partial u}{\partial z}=\varphi(x, y, z, u) \tag{7}$$

où f, g, h, φ sont des fonctions données et u une fonction inconnue de x, y, z. On peut envisager de représenter une solution sous la forme implicite $F(x, y, z, u)=0$ on aura alors :

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

donc si $\dfrac{\partial F}{\partial u}\neq 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}}$

et $$(I) \Longrightarrow f\frac{\partial F}{\partial x}+g\frac{\partial F}{\partial y}+h\frac{\partial F}{\partial z}+\varphi\frac{\partial F}{\partial u}=0$$

Aux notations près, on retrouve l'équation (6) du paragraphe précédent. Or cette équation est, en particulier, satisfaite lorsque F est une intégrale première du système différentiel :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=\frac{f}{\varphi}, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\frac{g}{\varphi}, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}=\frac{h}{\varphi}$$

que l'on peut écrire aussi $$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{f}=\frac{\mathrm{d}y}{g}=\frac{\mathrm{d}z}{h}=\frac{\mathrm{d}u}{\varphi}} \qquad (8)$$

(8) est appelé **système différentiel caractéristique** de l'équation aux dérivées partielles (7). Toute intégrale première du système (8) définit une solution de (7). En outre, toute fonction de plusieurs intégrales premières de (8) est encore intégrale première, puisque $F_1(x, y, z, u)=a$ et $F_2(x, y, z, u)=b$ entraînent $\Phi(F_1, F_2)=\Phi(a, b)=c=$constante.

Ainsi trois intégrales premières, indépendantes du système (8), définissent une solution de (7) sous la forme implicite $\Phi(F_1, F_2, F_3)=0$.

Réciproquement, si F_1, F_2, F_3, F_4 sont quatre intégrales premières de (8), les relations

$$f\frac{\partial F_i}{\partial x}+g\frac{\partial F_i}{\partial y}+h\frac{\partial F_i}{\partial z}+\varphi\frac{\partial F_i}{\partial u}=0 \quad (i=1, 2, 3, 4),$$

où f, g, h, φ sont en général non nulles, exigent la nullité du jacobien $\dfrac{D(F_1, F_2, F_3, F_4)}{D(x, y, z, u)}$, donc, d'après un résultat du chapitre 11, tome 1, F_1, F_2, F_3, F_4 sont liées par une relation, par exemple $F_4=\Phi(F_1, F_2, F_3)$. On voit que toute intégrale première de (8) est de la forme $\Phi(F_1, F_2, F_3)$ si F_1, F_2, F_3 sont trois intégrales premières indépendantes.

On démontre, et nous admettrons, qu'en dehors d'éventuelles solutions «singulières» analogues à celles que peuvent posséder certaines équations différentielles, toutes les solutions d'une équation aux dérivées partielles de la forme (7) sont définies implicitement par $\Phi(F_1, F_2, F_3)=0$.

• En résumé, pour résoudre l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre

$$f(x, y, z, u)\frac{\partial u}{\partial x}+g(x, y, z, u)\frac{\partial u}{\partial y}+h(x, y, z, u)\frac{\partial u}{\partial z}=\varphi(x, y, z, u) \quad (7)$$

on doit trouver trois intégrales premières indépendantes $F_1(x, y, z, u)$, $F_2(x, y, z, u)$, $F_3(x, y, z, u)$ du système différentiel caractéristique

$$\frac{dx}{f(x, y, z, u)}=\frac{dy}{g(x, y, z, u)}=\frac{dz}{h(x, y, z, u)}=\frac{du}{\varphi(x, y, z, u)} \quad (8)$$

La solution générale de (7) s'exprime alors par

$$\Phi[F_1(x, y, z, u), F_2(x, y, z, u), F_3(x, y, z, u)]=0,$$

où Φ est une fonction arbitraire possédant des dérivées partielles du premier ordre.

Cette méthode de résolution est évidemment valable en dimension quelconque.

Exemple.

L'équation aux dérivées partielles à deux variables, de fonction inconnue $z(x, y)$,

$$x(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=(x-y)z \quad (9)$$

a pour système caractéristique $\dfrac{dx}{x(y-z)}=\dfrac{dy}{y(z-x)}=\dfrac{dz}{z(x-y)}$

dont nous avons, dans le paragraphe 2, trouvé les intégrales premières $x+y+z$ et xyz. La solution générale de (9) est donc définie par l'équation

$$\Phi(x+y+z, xyz)=0$$

où Φ est une fonction dérivable quelconque.

Cas particulier.

L'équation $f(x, y, z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+g(x, y, z)\dfrac{\partial u}{\partial y}+h(x, y, z)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0 \quad (10)$

admet pour système caractéristique

$$\frac{dx}{f}=\frac{dy}{g}=\frac{dz}{h}, \quad du=0$$

donc si F_1, F_2 sont deux intégrales premières indépendantes du système $\dfrac{dx}{f}=\dfrac{dy}{g}=\dfrac{dz}{h}$, la solution générale de (10) est $u=\Phi(F_1, F_2)$.

5. Cas de la dimension 2. Problème de Cauchy

La forme générale d'une équation aux dérivées partielles linéaire, du premier ordre, à deux variables, est :

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x, y, z) \tag{11}$$

Tel était le cas de l'exemple (9) ci-dessus.

Le système différentiel caractéristique est

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \tag{12}$$

Les courbes intégrales sont tangentes en chacun de leurs points M au vecteur $\vec{V}(M)$ de composantes scalaires $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, ce sont les lignes de champ, ou lignes de force, du champ vectoriel $\vec{V}(M)$. On les appelle aussi courbes caractéristiques de l'équation (11). Les équations d'une de ces courbes sont $F(x, y, z)=a$, $G(x, y, z)=b$, F et G étant deux intégrales premières de (12), et une solution de (11) est une surface d'équation $\Phi[F(x, y, z), G(x, y, z)]=0$ engendrée par les courbes caractéristiques vérifiant la relation $\Phi(a, b)=0$, ceci à l'exclusion d'éventuelles solutions singulières.

Le problème du respect de conditions initiales se pose dans les termes suivants : peut-on trouver une surface solution passant par une courbe donnée Γ? Ce problème est connu sous le nom de **problème de Cauchy** pour l'équation (11).

Deux cas se présentent :

a) Γ est une courbe caractéristique, définie par $F(x, y, z)=a_0$, $G(x, y, z)=b_0$. Toute fonction Φ telle que $\Phi(a_0, b_0)=0$ définit une surface solution de (11) par l'équation $\Phi[F(x, y, z), G(x, y, z)]=0$, le problème de Cauchy est indéterminé.

b) Γ n'est pas une courbe caractéristique : alors elle peut être paramétrée par $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\theta(t)$, coordonnées d'un point M de Γ; par ce point M passe une courbe caractéristique C_t définie par :

$$F(x, y, z)=a(t)=F[\varphi(t), \psi(t), \theta(t)],$$
$$G(x, y, z)=b(t)=G[\varphi(t), \psi(t), \theta(t)].$$

L'ensemble des courbes C_t à un paramètre est une surface S, solution de (11), et passant par tous les points de Γ, donc contenant Γ. Le problème de Cauchy a donc alors une solution unique.

Exemple.

Revenons à l'équation du paragraphe 4 :

$$x(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+y(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=(x-y)\,z \tag{9}$$

dont la solution générale est l'ensemble des surfaces $\Phi(x+y+z, xyz)=0$.

Cherchons une surface solution passant par le cercle d'équations $z=1$, $x^2+y^2=1$ que l'on peut paramétrer par $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=1$.

La courbe caractéristique passant par $M(t)$ a pour équations

$$x+y+z=\cos t+\sin t+1, \quad xyz=\cos t \sin t$$

On élimine facilement t :

$$(x+y+z-1)^2=(\cos t+\sin t)^2=1+2\sin t\cos t=1+2xyz$$

la surface demandée a pour équation

$$2xyz-(x+y+z)^2+2(x+y+z)=0$$

6. Équations aux différentielles totales

a) On appelle ainsi une équation de la forme

$$\boxed{P(x, y, z)\,dx+Q(x, y, z)\,dy+R(x, y, z)\,dz=0} \qquad (13)$$

ou plus généralement $\sum_1^n P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_i=0$.

Pour $n=2$, il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre dont la solution générale peut être représentée par $u(x, y)=\lambda$, avec $du=\varphi(x, y)(P\,dx+Q\,dy)$, φ étant un facteur intégrant de la forme différentielle $\omega=P\,dx+Q\,dy$.

b) Pour $n=3$, on étudie, par analogie, l'existence de facteurs intégrants $\varphi(x, y, z)$ de la forme différentielle $\omega=P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ (appelée aussi forme de Pfaff).

On veut que $\dfrac{\partial(\varphi R)}{\partial y}=\dfrac{\partial(\varphi Q)}{\partial z}$, donc $Q\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}-R\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\varphi\left(\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z}\right)$

et de même $R\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-P\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=\varphi\left(\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x}\right)$, $P\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}-Q\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\varphi\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$.

En multipliant ces relations respectivement par P, Q, R, et en les ajoutant, on obtient la condition nécessaire de compatibilité :

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0 \qquad (14)$$

On démontre, et nous admettrons, que cette condition est suffisante pour l'existence de facteurs intégrants de ω. Elle s'exprime très simplement sous forme vectorielle : si $\vec{V}(M)$ est le champ (P, Q, R),

$$(14) \iff \vec{V}(M)\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}(M)=0 \qquad (15)$$

Elle exprime que $\vec{V}(M)$ est orthogonal en tout point M à son rotationnel.

Cette condition étant remplie, on peut, en théorie, déterminer φ (non nul) et par suite $u(x, y, z)$ telle que $du = \varphi \cdot \omega$, donc $\omega = 0 \Longrightarrow u = \lambda$, λ étant une constante.

On dit alors que l'équation aux différentielles totales (13) est complètement intégrable, sa solution générale est la famille de surfaces à un paramètre d'équation $u(x, y, z) = \lambda$ (S_λ). Ce sont les surfaces équipotentielles du champ de gradients $\varphi(M) \cdot \vec{V}(M)$, et aussi les trajectoires orthogonales des lignes de force du champ $\vec{V}(M)$.

Nous admettrons que, si (15) n'est pas remplie, il n'existe pas de famille de surfaces à un paramètre orthogonales en chacun de leurs points M au champ $\vec{V}(M)$.

c) Forme remarquable d'une équation aux différentielles totales : en divisant (13) par $R(x, y, z)$, supposé non nul, et isolant dz, on obtient

$$dz = f(x, y, z)\,dx + g(x, y, z)\,dy.$$

Ceci revient au système d'équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y, z), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = g(x, y, z)$$

Elles sont compatibles si et seulement si le champ $(f, g, -1)$ vérifie la condition (14), c'est-à-dire si

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial z} - f\frac{\partial g}{\partial z} = 0 \tag{16}$$

7. Notions sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre, non linéaires, à deux variables

Une telle équation s'écrit, avec les notations de Monge $\left(p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{17}$$

On peut envisager d'adjoindre à (17) une équation (en partie arbitraire)

$$G(x, y, z, p, q) = \lambda \tag{18}$$

λ étant une constante, G étant choisie de façon que (17) et (18), supposées résolues sous forme $p = f(x, y, z, \lambda)$, $q = g(x, y, z, \lambda)$ soient compatibles, ce qui impose à G des restrictions que nous examinerons plus loin.

On peut alors résoudre l'équation aux différentielles totales

$$dz = f(x, y, z, \lambda)\,dx + g(x, y, z, \lambda)\,dy$$

sous la forme $\varphi(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$, μ étant un second paramètre.

La famille de surfaces $S_{\lambda, \mu}$ ainsi définie est évidemment solution de (17), on dit que c'est une intégrale complète de (17). On peut, sans

envisager les cas d'exception ni les solutions singulières éventuelles de (17), donner une méthode qui conduit à une catégorie beaucoup plus générale de solutions de (17). Observons pour cela que (17) exprime une relation vérifiée en tout point M d'une surface S solution de (17) par les coordonnées de M et les coefficients p, q de l'équation $Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$ du plan tangent en M à S.

Cette relation est vérifiée aussi en M par toute surface tangente à S. Si, parmi les surfaces de l'intégrale complète $\varphi(x, y, z, \lambda, \mu)=0$, nous envisageons celles à un seul paramètre définies par $\mu=h(\lambda)$, ces surfaces S_λ ont une enveloppe Σ_h, surface dépendant de la fonction arbitraire h, dont l'équation vérifie (17). On a donc obtenu une famille de solutions de (17) dépendant d'une fonction arbitraire : nous admettrons qu'il s'agit de la solution générale.

Cette méthode de résolution, générale mais donnant parfois lieu à des calculs complexes, est la **méthode de Lagrange et Charpit.**

Il reste à voir comment choisir G pour que (17) et (18) soient compatibles : il faut que $\dfrac{\partial f}{\partial y}-\dfrac{\partial g}{\partial x}+g\dfrac{\partial f}{\partial z}-f\dfrac{\partial g}{\partial z}=0$ (relation (16) avec $p=f(x, y, z, \lambda)$, $q=g(x, y, z, \lambda)$ tirés de (17) et (18)).

La relation (16) s'écrit encore $\dfrac{\partial p}{\partial y}-\dfrac{\partial q}{\partial x}+q\dfrac{\partial p}{\partial z}-p\dfrac{\partial q}{\partial z}=0$ (16)

Or, en dérivant (17) et (18) par rapport à x (p et q étant fonctions implicites de x, y, z définies par (17) et (18)), on obtient :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial x}=0\\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial x}+\dfrac{\partial G}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{\partial G}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial x}=0\end{cases}$$

d'où l'on tire $\dfrac{\partial q}{\partial x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial p}\dfrac{\partial G}{\partial q}-\dfrac{\partial F}{\partial q}\dfrac{\partial G}{\partial p}\right)=\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial G}{\partial p}-\dfrac{\partial F}{\partial p}\dfrac{\partial G}{\partial x}$

Le jacobien $\dfrac{D(F, G)}{D(p, q)}$ étant supposé non nul puisque F et G sont nécessairement indépendantes, cette relation fournit $\dfrac{\partial q}{\partial x}$.

On obtient de même les relations analogues

$$\frac{\partial p}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p}\right)=\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial q}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p}\right)=\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial q}$$

$$\frac{\partial q}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p}\right)=\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial z}$$

En reportant dans (16), nous obtenons, après multiplication par $\frac{D(F, G)}{D(p, q)}$:

$$\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial x}+q\left(\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial q}\right)$$
$$-p\left(\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial p}-\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial z}\right)=0$$

Or F est donnée, $G(x, y, z, p, q)$ est donc donnée par l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, linéaire, à cinq variables :

$$\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial y}+\left(p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}\right)\frac{\partial G}{\partial z}-\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial G}{\partial p}$$
$$-\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial G}{\partial q}=0 \quad (19)$$

Une intégrale première du système caractéristique de (19), pourvu qu'elle contienne effectivement au moins une des deux variables p, q, définit une fonction G, à partir de laquelle peut s'engager la méthode de Lagrange et Charpit, sans qu'il soit nécessaire de résoudre complètement (19).

Exemple.

Soit à trouver la solution générale de l'équation $p^2-q^2=1$ (17)

Un calcul immédiat montre que (19) s'écrit :

$$p\frac{\partial G}{\partial x}-q\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial z}=0$$

dont le système caractéristique est $\frac{dx}{p}=-\frac{dy}{q}=\frac{dz}{1}=\frac{dp}{0}=\frac{dq}{0}$

Notons que dans un tel système, un zéro en dénominateur est admis comme entraînant la nullité du numérateur correspondant. On a donc les intégrales premières $p=a$, $q=b$, évidemment liées par $a^2-b^2=1$, ce qui conduit à poser $p=\operatorname{ch}\lambda$, $q=\operatorname{sh}\lambda$, où λ est une constante. On doit alors résoudre l'équation aux différentielles totales

$$dz=\operatorname{ch}\lambda\, dx+\operatorname{sh}\lambda\, dy$$

qui donne $z=x\operatorname{ch}\lambda+y\operatorname{sh}\lambda+\mu$ intégrale complète de (17). La poursuite de la méthode de Lagrange et Charpit consiste à chercher l'enveloppe de la famille de plans

$$z=x\operatorname{ch}\lambda+y\operatorname{sh}\lambda+h(\lambda).$$

En dérivant par rapport à λ et résolvant en x et y, on obtient successivement

$$0=x\operatorname{sh}\lambda+y\operatorname{ch}\lambda+h'(\lambda)$$

et $\begin{cases} x = z \operatorname{ch} \lambda + h'(\lambda) \operatorname{sh} \lambda - h(\lambda) \operatorname{ch} \lambda \\ y = -z \operatorname{sh} \lambda + h(\lambda) \operatorname{sh} \lambda - h'(\lambda) \operatorname{ch} \lambda \end{cases}$

équations paramétriques d une famille de surfaces dépendant de la fonction dérivable arbitraire h, qui constitue la solution générale de (17). Il s'agit, d'après la théorie générale des enveloppes, de surfaces développables. Parmi ces surfaces figure, obtenu pour $h(\lambda) = 0$, le cône de révolution $x^2 = y^2 + z^2$; comme, d'autre part, (17) est invariante par une translation quelconque sur les surfaces intégrales, tous les cônes de révolution d'axes parallèles à Ox, d'ouverture $\frac{\pi}{2}$, sont aussi des solutions particulières. Ceci est valable à une symétrie près par rapport à xOy, car on aurait aussi pu poser $p = -\operatorname{ch} \lambda$.

C. ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

1. Généralités. Problème de Cauchy

De nombreux problèmes de physique conduisent à des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre parfois réductibles à une seule variable : ce sont alors des équations différentielles.

La forme la plus générale d'une équation linéaire du second ordre à deux variables, où nous employons les notations de Monge

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}*,\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$ est

$$Ar + Bs + Ct + D = 0 \qquad (20)$$

où A, B, C, D sont des fonctions données pouvant renfermer x, y, z, p, q.

Mais on rencontre fréquemment en physique des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre à quatre variables, les coordonnées d'un point $M(x, y, z)$ et le temps t. Les plus classiques feront l'objet d'une étude sommaire ultérieurement.

On ne sait généralement pas trouver la solution générale d'une telle équation. Cependant lorsque cette solution est connue, son adaptation à des conditions initiales ou à des conditions « aux limites » que nous évoquerons à propos d'exemples, est souvent délicate. Une forme de conditions initiales est la suivante : trouver une surface solution de (20) passant par une courbe Γ donnée et admettant en chaque point M de Γ un plan tangent P variant, en fonction de M, suivant une loi continue donnée. C'est le problème de Cauchy pour une équation du second ordre. On démontre, et nous l'admettrons, que pour une équation linéaire ce problème a, dans le cas général, une solution et une seule.

---

* Nous supposons vérifié le théorème de Schwarz, c'est-à-dire $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

Plus précisément nous admettrons sans démonstration le théorème de Cauchy-Kowalewska :

Si, sur la courbe Γ, la relation $C\,dx^2 - B\,dx\,dy + A\,dy^2 = 0$ n'est pas vérifiée, il existe une surface intégrale et une seule de l'équation $Ar + Bs + Ct + D = 0$ satisfaisant au problème de Cauchy pour la courbe Γ. Nous n'insisterons pas sur le cas général envisagé ici.

2. Équation linéaire où les coefficients A, B, C ne dépendent que de x et y

Soit $A(x, y)\, r + B(x, y)\, s + C(x, y)\, t + D(x, y, z, p, q) = 0$ (21)

L'équation $C\,dx^2 - B\,dx\,dy + A\,dy^2 = 0$ est une équation différentielle du premier ordre. Elle définit éventuellement, dans le plan xOy, des courbes dites **caractéristiques** de l'équation (21). Pour une courbe Γ de l'espace se projetant sur xOy suivant une caractéristique, le problème de Cauchy n'a pas une solution unique.

Nous admettrons que, comme dans le cas des équations linéaires du premier ordre, il existe une infinité de surfaces intégrales passant par une telle courbe et admettant le long de cette courbe un plan tangent variant suivant une loi donnée. Un tel système courbe-plans tangents s'appelle une bande caractéristique.

Plus précisément l'équation précédente s'écrit encore

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\frac{dy}{dx} + C = 0 \qquad (22)$$

et on peut distinguer trois types de domaines Δ suivant le nombre de racines réelles de (22) :

a) Si, sur Δ, $B^2 - 4AC < 0$, il n'y a pas de caractéristiques réelles, on dit que l'équation (21) est de type elliptique sur Δ.

b) Si, sur Δ, $B^2 - 4AC > 0$, (22) se décompose en

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = f_2(x, y)$$

qui ont pour solutions $\varphi_1(x, y, \lambda) = 0$, $\varphi_2(x, y, \mu) = 0$.

Par un point du plan xOy passent deux caractéristiques. On dit que l'équation (21) est de type hyperbolique sur Δ.

c) Si, sur Δ, $B^2 - 4AC = 0$, les deux familles de caractéristiques se confondent, on dit que (21) est de type parabolique sur Δ.

Cette classification joue un rôle dans les méthodes de résolution des équations correspondantes, que nous n'approfondirons pas dans le cas général.

3. Étude de l'équation $Ar+Bs+Ct=0$ à coefficients constants

Cette équation est évidemment de type constant, elliptique, hyperbolique ou parabolique, dans tout le plan xOy.

a) Le cas hyperbolique a été étudié dans l'exercice 6 du chapitre 11, tome 1.

En effectuant le changement de variables $x+ay=u$, $x+by=v$, $b\neq a$, on obtient :

$$p=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$q=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=a\frac{\partial z}{\partial u}+b\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$r=\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right)^{(2)}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$s=\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right)\left(\left(a\frac{\partial z}{\partial u}+b\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right)=a\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a+b)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+b\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$t=\left(\left(a\frac{\partial z}{\partial u}+b\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right)^{(2)}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2ab\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+b^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

L'équation donnée devient :

$$(Ca^2+Ba+A)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+[2Cab+B(a+b)+2A]\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(Cb^2+Bb+A)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0 \quad (23)$$

Puisque $B^2-4AC>0$, l'équation $C\alpha^2+B\alpha+A=0$ (appelée équation caractéristique) a deux racines réelles que l'on peut prendre pour valeurs de a et b, alors (23) s'écrit $k\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, avec

$$k=2Cab+B(a+b)+2A=2C\left(\frac{A}{C}\right)+B\left(-\frac{B}{C}\right)+2A=\frac{4AC-B^2}{C}\neq 0$$

donc $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, $\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)=0$, $\dfrac{\partial z}{\partial u}=f(u)$, $z=F(u)+G(v)$ soit $z=F(x+ay)+G(x+by)$, F et G étant deux fonctions quelconques à dérivées secondes continues. On connaît donc la solution générale de l'équation $Ar+Bs+Ct=0$, dans le cas hyperbolique.

b) Dans le cas parabolique où $B^2-4AC=0$, l'équation caractéristique $C\alpha^2+B\alpha+A=0$ a une racine double $\alpha=-\frac{B}{2C}$. Si nous prenons $a=-\frac{B}{2C}$, et $b\neq-\frac{B}{2C}$, la transformation du (*a*) donne

$$k\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(Cb^2+Bb+A)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0 \qquad (24)$$

avec

$$k=2Cab+B(a+b)+2A=2Cb\left(-\frac{B}{2C}\right)+Bb+B\left(-\frac{B}{2C}\right)+2A$$

$=0$ quel que soit b, et $\lambda=Cb^2+Bb+A\neq0$ puisque $b\neq a$.

(24) se réduit donc à $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$, qui donne

$$\frac{\partial z}{\partial v}=f(u),\quad z=vf(u)+g(u)$$

Comme $u=x+ay$, et $v=x+by$, avec b arbitraire, on peut prendre $b=0$ et la solution générale de $Ar+Bs+Ct=0$ s'écrit :

$$z=xf(x+ay)+g(x+ay)$$

c) Dans le cas elliptique où $B^2-4AC<0$, l'équation caractéristique n'a pas de racine réelle et on ne peut annuler sur $\mathbb{R}$ aucun des coefficients de $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$. En revanche, on peut, comme nous allons le vérifier, annuler celui de $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$ et rendre égaux les deux autres, en écrivant :

$$2Cab+B(a+b)+2A=0$$

$$Ca^2+Ba+A=Cb^2+Bb+A, \text{ soit } C(a+b)+B=0$$

Une résolution immédiate fournit $a+b=-\frac{B}{C}$, $ab=\frac{B^2-2AC}{2C^2}$ ($c\neq0$) a et b sont racines de $\alpha^2+\frac{B}{C}\alpha+\frac{B^2-2AC}{2C^2}=0$, de discriminant $\frac{4AC-B^2}{C^2}>0$, d'où deux valeurs distinctes de a et b.

L'équation réduite est alors $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$.

C'est l'équation de Laplace à deux variables, dont on ne connaît pas la solution générale sous forme réelle, et sur laquelle nous reviendrons.

Notons cependant que, en « prolongeant » en quelque sorte à $\mathbb{C}$ la méthode de réduction du cas hyperbolique (a), l'équation caractéristique de l'équation de Laplace, que nous prendrons par rapport aux variables x, y, soit $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, a pour racines i et $-i$, et qu'il paraît logique d'écrire ses solutions sous la forme $z=f(x+iy)+g(x-iy)$, f et g, ainsi que leurs dérivées, étant des fonctions holomorphes. Ces fonctions z sont en général complexes, on obtient toutefois des solutions réelles en prenant $g=f$ et en prenant pour f le prolongement à $\mathbb{C}$ d'une fonction réelle dans $\mathbb{R}$, puisque alors $f(x-iy)=\overline{f(x+iy)}$; par exemple $z=e^{x+iy}+e^{x-iy}=2\,e^x \cos y$ est une fonction harmonique, solution de $\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; on retrouve ainsi le fait que z est la partie réelle d'une fonction holomorphe quelconque, en l'occurrence $2f(x+iy)$.

Notons, pour conclure, que la connaissance de la solution générale d'une équation aux dérivées partielles, en particulier de l'un des types précédents, n'est souvent ni nécessaire ni suffisante à la résolution du problème physique correspondant qui exige l'adaptation à des conditions de types divers. Nous allons dans ce qui suit examiner quelques équations classiques de la physique.

D. ÉTUDE DE QUELQUES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE LA PHYSIQUE

1. Introduction et généralités

Dans les problèmes physiques conduisant à des équations aux dérivées partielles, le plus souvent linéaires du second ordre à deux, trois ou quatre variables, la solution cherchée doit respecter deux types de conditions :

— des **conditions initiales :** on connaît le plus souvent les valeurs de la fonction et de ses dérivées à l'instant $t=0$;

— des **conditions aux limites** : à tout instant t, certains points du système physique étudié doivent avoir une position donnée; par exemple, dans le problème des cordes vibrantes, les extrémités doivent rester fixes.

En dehors des méthodes générales vues précédemment, deux méthodes essentielles peuvent conduire à des solutions particulières intéressantes :

• La *séparation des variables*, déjà utilisée, dans le chapitre consacré aux fonctions de Bessel, à partir de l'équation de Laplace : elle consiste à chercher la fonction inconnue f sous forme d'un produit de fonctions de chacune des variables, qui souvent sont alors données par des équations différentielles.

• La *méthode de superposition* : pour une équation linéaire, au sens strict du terme (c'est-à-dire du premier degré par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées) et sans second membre (ou « homogène »), toute combinaison linéaire de solutions particulières est elle-même une solution, en particulier si on peut définir une suite infinie de solutions f_n, toute série convergente $\sum_0^{+\infty} \alpha_n f_n$ est encore une solution, les coefficients α_n pouvant être adaptés aux conditions initiales et aux limites. Cette méthode n'est autre que celle déjà employée pour les équations différentielles linéaires.

Nous étudierons sommairement dans les paragraphes suivants :

— l'équation des ondes à deux variables, appelée aussi équation des cordes vibrantes : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

— les équations de Laplace à deux ou trois variables : $\Delta u = 0$

— l'équation des ondes : $\Delta u - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, Δu étant le laplacien à 3 variables;

— l'équation des télégraphistes, réductible à la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\alpha\frac{\partial u}{\partial t} - (\alpha^2 - 1)\, u = 0$$

— l'équation de la chaleur : $\Delta u - \lambda^2 \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$, Δu étant le laplacien à 3 variables.

2. Équation des cordes vibrantes

Une corde AB, de longueur l, fixée en ses extrémités A et B, peut subir des vibrations régies par l'équation

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0} \qquad (25)$$

où $u(x, t)$ représente à l'instant t l'élongation par rapport à la droite AB du point M d'abscisse x de la corde, et où a est une constante liée à l'élasticité de la corde.

u doit satisfaire aux conditions aux limites

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

qui expriment qu'à tout instant t, A et B restent fixes, et aux conditions initiales

$$u(x, 0)=f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=g(x), \quad x\in[0, l]$$

avec $f(0)=f(l)=0$, et $g(0)=g(l)=0$
qui expriment la position et la vitesse initiale de chaque point de la corde.

a) L'équation (25) est du type hyperbolique étudié dans le paragraphe (*C.* 3. *a*), sa solution générale est :

$$u(x, t)=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$$

$t=0$ donne $\quad \varphi(x)+\psi(x)=f(x)$

$$a[\varphi'(x)-\psi'(x)]=g(x)$$

d'où $\quad \varphi(x)-\psi(x)=\frac{1}{a}\int_0^x g(\alpha)\,d\alpha+C \qquad C=\text{constante}$

et $\quad \varphi(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+\frac{1}{a}\int_0^x g(\alpha)\,d\alpha+C\right)$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)-\frac{1}{a}\int_0^x g(\alpha)\,d\alpha-C\right) \qquad \text{avec } 0\leqslant x\leqslant l.$$

On peut prendre $C=0$ car C s'élimine dans u.

Mais t, et par suite $x+at$ et $x-at$, peuvent prendre des valeurs quelconques alors que les fonctions φ et ψ que l'on vient de construire ne sont connues que sur $[0, l]$. Nous allons voir que grâce aux conditions aux limites, non encore utilisées, on peut prolonger φ et ψ et les connaître complètement.

On sait que $\quad u(0, t)=\varphi(at)+\psi(-at)=0 \qquad (26)$

$$u(l, t)=\varphi(l+at)+\psi(l-at)=0 \qquad (27)$$

$$(26) \Longrightarrow \psi(-at)=-\varphi(at), \quad \text{donc} \quad \psi(-x)=-\varphi(x)$$

ce qui définit ψ sur $[-l, 0]$; ψ est donc connue sur $[-l, +l]$.

De même $(27) \Longrightarrow \varphi(l+at)=-\psi(l-at)$
$\psi(l-at)$ étant connue pour $0\leqslant at\leqslant l$, donc $l\leqslant l+at\leqslant 2l$, ceci définit φ sur $[l, 2l]$: φ est donc connue sur $[0, 2l]$.

Enfin remplaçons t, dans (26), par $t+\frac{l}{a}$, on obtient

$$\varphi(at+l)+\psi(-at-l)=0 \qquad (28)$$

et en retranchant (27) et (28), $\psi(l-at)-\psi(-l-at)=0$,
soit en posant $-l-at=z$, $\quad \psi(z+2l)=\psi(z)$

ψ est donc une fonction périodique de période $2l$, maintenant entièrement connue puisqu'elle l'était déjà sur $[-l, +l]$. Un raisonnement analogue montre que φ aussi est $2l$-périodique et complètement définie par ses valeurs sur $[0, 2l]$. $u(x, t)$ est donc connue.

b) Une autre méthode consiste à séparer les variables dans (25) en posant $u(x, t) = F(x)\, G(t)$, on obtient ainsi :

$$F''(x)\, G(t) - \frac{1}{a^2} F(x)\, G''(t) = 0$$

d'où
$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{G''(t)}{G(t)} = k \quad \text{constante}$$

et les deux équations différentielles

$$F''(x) - kF(x) = 0$$
$$G''(t) - ka^2\, G(t) = 0$$

$k > 0$ conduirait à des solutions pouvant devenir infinies, il est donc naturel de se limiter à $k < 0$, soit $k = -\omega^2$, qui conduit à

$$u(x, t) = (A \sin \omega x + B \cos \omega x)\,(C \sin a\omega t + D \cos a\omega t)$$

Il s'agit bien de solutions particulières de la forme
$$\varphi(x + at) + \psi(x - at)$$

Les conditions aux limites nous donnent :

$u(0, t) = B(C \sin a\omega t + D \cos a\omega t) = 0, \quad \forall t, \quad$ donc $B = 0$
$u(l, t) = A \sin \omega l\,(C \sin a\omega t + D \cos a\omega t) = 0, \quad \forall t, \quad$ donc $\sin \omega l = 0$

On doit donc prendre $\omega l = n\pi$, $\omega = \dfrac{n\pi}{l}$, n entier et on obtient les solutions particulières (avec $AC = b_n$, $BC = a_n$) :

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{l} \left(a_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right)$$

D'après la méthode de superposition, toute série convergente

$$u(x, t) = \sum_{0}^{+\infty} u_n(x, t)$$

est encore une solution de (25).

Il reste à tenir compte des conditions initiales. Nous supposerons la série précédente uniformément convergente par rapport à t, pour x donné, de sorte que $u(x, t)$ soit continue et dérivable terme à terme. On veut donc réaliser :

$$u(x, 0) = \sum_{1}^{+\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{\pi a}{l} \sum_{1}^{+\infty} n b_n \sin \frac{n\pi x}{l} = g(x)$$

Or, dans le chapitre sur les séries de Fourier, nous avons vu qu'une fonction donnée sur $[0, l]$, prolongée conventionnellement comme fonction impaire, peut être développée en série de Fourier impaire de période $2l$, il en est ainsi de $f(x)$ et $g(x)$, et on peut les écrire

$$f(x) = \sum_{1}^{+\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad g(x) = \sum_{1}^{+\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

on obtient donc par identification $a_n = \alpha_n$, $b_n = \dfrac{l}{n\pi a} \beta_n$

Il resterait à s'assurer, *a posteriori*, de la validité des hypothèses faites dans le raisonnement précédent.

3. Équation de Laplace

L'équation de Laplace $\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0}$ ou $\Delta u = 0$ où x, y, z sont les coordonnées d'un point M, intervient dans de nombreux problèmes. Elle est satisfaite, par exemple, par le potentiel électrostatique en M en l'absence de charges, et par tout potentiel newtonien. Comme $\Delta u = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}\, u}(M))$, $\Delta u = 0$ est, plus généralement, la condition pour qu'un champ de gradients, donc à circulation conservative, soit aussi à flux conservatif. Rappelons que les solutions de l'équation de Laplace sont les fonctions harmoniques. Dans certains cas, des symétries permettent de se ramener à l'équation de Laplace à deux variables, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, qui est aussi la condition nécessaire et suffisante pour que $u(x, y)$ soit la partie réelle ou la partie imaginaire d'une fonction $f(z)$, $(z = x + iy)$, holomorphe. Nous étudierons d'abord ce cas.

a) Équation de Laplace à deux variables

Nous avons vu que la solution générale de

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (29)$$

est $u = f(x+iy) + g(x-iy)$, f et g étant holomorphes ainsi que leurs dérivées premières. On ne connaît pas d'expression de cette solution générale sous forme réelle.

La méthode de séparation des variables, $u(x, y) = f(x)\, g(y)$, conduit à $\dfrac{f''(x)}{f(x)} = -\dfrac{g''(y)}{g(y)} = k$, constante, d'où, suivant que $k=0$, $k=\omega^2$, $k=-\omega^2$, $(\omega>0)$, les solutions :

$$u = (ax+b)\,(cy+d)$$

$$u = (ae^{\omega x} + be^{-\omega x})\,(c \sin \omega y + d \cos \omega y)$$

$$u = (a \sin \omega x + b \cos \omega x)\,(ce^{\omega y} + de^{-\omega y})$$

Ce sont des **solutions élémentaires** en coordonnées cartésiennes.

On peut aussi trouver des solutions élémentaires en coordonnées polaires. La transformation du laplacien à 2 variables est un cas particulier de celle effectuée au début du chapitre sur les fonctions de Bessel dans le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques, elle donne (avec $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$) :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{(nous considérons } \rho>0) \qquad (30)$$

$u = \varphi(\rho)\, \psi(\theta)$ conduit à $\rho^2 \dfrac{\varphi''}{\varphi} + \rho \dfrac{\varphi'}{\varphi} = -\dfrac{\psi''}{\psi} = k$

En particulier si l'on envisage $\psi(\theta)$ périodique, $k=\omega^2$, $\omega>0$, donne :

$$\psi(\theta) = a \sin \omega\theta + b \cos \omega\theta$$

φ étant solution de $\quad \rho^2 \varphi'' + \rho\varphi' - \omega^2 \varphi = 0$

Pour cette équation d'Euler, la recherche de solutions $\varphi = \rho^r$ conduit à l'équation caractéristique $r(r-1)+r-\omega^2=0$, d'où $r = \pm\omega$, on obtient les solutions élémentaires

$$u(\rho, \theta) = (c\rho^{\omega} + \mathrm{d}\rho^{-\omega})\,(a \sin \omega\theta + b \cos \omega\theta)$$

et plus généralement des sommes finies ou des séries de fonctions de cette forme.

$k=0$ conduit à $u(\rho, \theta) = (c \operatorname{Log} \rho + \mathrm{d})\,(a\theta + b)$

Cherchons, à titre d'exemple, à trouver une solution de (29) (c'est-à-dire aussi de (30)) définie sur le disque $\rho \leqslant 1$, et prenant sur la frontière de ce disque, c'est-à-dire sur le cercle trigonométrique, la valeur donnée $f(\theta)$.

On peut chercher $u(\rho, \theta)$ sous la forme

$$u(\rho, \theta) = a_0 + \sum_1^{+\infty} \rho^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \qquad (31)$$

les coefficients des $\rho^{-\omega}$ (ici ρ^{-n}) ayant été annulés pour que u soit définie à l'origine. Il suffit alors de développer $f(\theta)$, qui a nécessairement pour période 2π, en série de Fourier :

$$f(\theta) = \alpha_0 + \sum_1^{+\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

l'identification $u(1, \theta) = f(\theta)$ est alors immédiate et donne $a_n = \alpha_n$, $b_n = \beta_n$

d'où :

$$u(\rho, \theta) = \alpha_0 + \sum_1^{+\infty} \rho^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

Remarquons que la fonction ainsi construite est une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 1$, vis-à-vis de ρ, et une série de Fourier uniformément convergente pour $\rho < 1$, vis-à-vis de θ, elle est donc continue par rapport à (ρ, θ) en tout point du disque ouvert $\rho < 1$.

Notons que le choix de $\omega = n$, entier, dans (31), n'est pas arbitraire, il est nécessité par le fait que $u(\rho, \theta)$ doit être définie sans ambiguïté en un point $M(\rho, \theta)$, ce qui est incompatible avec la présence de termes cos $\omega\theta$, ou sin $\omega\theta$, avec ω non entier.

Le problème traité ici, et sur lequel nous ne reviendrons pas dans d'autres exemples, s'appelle problème intérieur de Dirichlet pour la courbe envisagée (ici, le cercle trigonométrique).

b) Équation de Laplace à trois variables

On ne connaît pas sa solution générale sous forme explicite. Nous nous bornerons à la recherche de solutions particulières par séparation des variables.

1) Séparation des variables en coordonnées cartésiennes : posant $u(x, y, z) = f(x)\, g(x)\, h(z)$, on obtient $\dfrac{f''(x)}{f(x)} + \dfrac{g''(y)}{g(y)} + \dfrac{h''(z)}{h(z)} = 0$, ces trois rapports sont donc constants, puisque, par exemple, $\dfrac{f''(x)}{f(x)}$ ne doit dépendre que de y et z.

Selon que l'on prend une ou deux de ces constantes négatives, on peut obtenir pour u un produit d'une ou deux fonctions sinusoïdales et de deux ou une combinaison d'exponentielles.

2) Séparation des variables en coordonnées cylindriques : le laplacien s'écrit

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

et les transformations effectuées dans l'introduction aux fonctions de Bessel (chap. Fonctions de Bessel) conduisent aux solutions élémentaires :

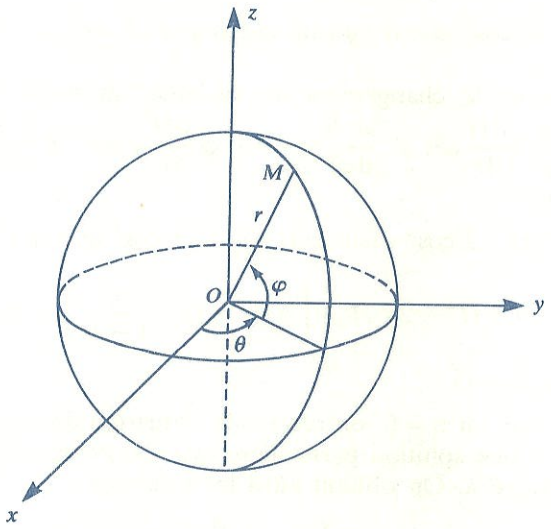
$$u_\lambda(\rho, \theta, z) = J_\lambda(k\rho)\, e^{-kz}\,(A \cos \lambda\theta + B \sin \lambda\theta)$$

En particulier on obtiendra une fonction définie sans ambiguïté en tout point (ρ, θ, z) en prenant λ entier, et les séries convergentes $u(\rho, \theta, z) = \sum_0^{+\infty} \alpha_n u_n(\rho, \theta, z)$ sont encore des solutions.

3) Séparation des variables en coordonnées sphériques : un calcul analogue à celui fait dans l'introduction mentionnée ci-dessus, long mais sans difficulté, donne l'expression du laplacien après le changement de variables

$$x = r \cos \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi$$

(figure ci-dessous)



Cette expression est

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\cos^2 \varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\cos \varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos \varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\right]$$

En posant $u=f(r)\,g(\theta)\,h(\varphi)$, on obtient :

$$r^2\frac{f''(r)}{f(r)}+2r\frac{f'(r)}{f(r)}+\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}+\frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)}-\operatorname{tg}\varphi\frac{h'(\varphi)}{h(\varphi)}=0.$$

Il en résulte : $$r^2\frac{f''(r)}{f(r)}+2r\frac{f'(r)}{f(r)}=\lambda \qquad \text{(constante)}$$

$$\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}=-\lambda\cos^2\varphi-\frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)}\cos^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi\frac{h'(\varphi)}{h(\varphi)}=\mu$$

Pour que g soit périodique et de période $\frac{2\pi}{n}$, n entier, prenons $\mu=-n^2$, on a alors $g''(\theta)+n^2\,g(\theta)=0$, $g(\theta)=a\sin n\theta+b\cos n\theta$

$r^2f''(r)+2rf'(r)-\lambda f(r)=0$ équation d'Euler

$f(r)=r^\alpha$ conduit à $\alpha(\alpha-1)+2\alpha-\lambda=0$, $\alpha^2+\alpha-\lambda=0$, d'où si $\lambda>-\frac{1}{4}$ deux valeurs α_1 et α_2 liées par $\alpha_1+\alpha_2=-1$, et en gardant la notation α pour α_1, la solution générale est donc

$$f(r)=cr^\alpha+\frac{\mathrm{d}}{r^{\alpha+1}}$$

Enfin $h''(\varphi)\cos^2\varphi-h'(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi+(\lambda\cos^2\varphi-n^2)\,h(\varphi)=0$

Effectuons ici le changement de variable $\sin\varphi=t$, $h(\varphi)=H(t)$, on obtient $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\cos\varphi$, $\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}\varphi^2}=-\sin\varphi\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}+\cos^2\varphi\frac{\mathrm{d}^2H}{\mathrm{d}t^2}$, l'équation donnant H est :

$$\cos^4\varphi\,H''(t)-2\cos^2\varphi\sin\varphi\,H'(t)+(\lambda\cos^2\varphi-n^2)\,H(t)=0$$

ou $$(1-t^2)\,H''-2t\,H'+\left[\alpha(\alpha+1)-\frac{n^2}{1-t^2}\right]H=0 \qquad (32)$$

puisque $\lambda=\alpha(\alpha+1)$.

• Dans le cas où $n=0$, on reconnaît l'équation de Legendre, et si α est un entier k, une solution particulière est $H(t)=P_k(t)$, polynôme de Legendre de degré k. On obtient ainsi les solutions :

$$u(r,\theta,\varphi)=b\left(cr^k+\frac{\mathrm{d}}{r^{k+1}}\right)P_k(\sin\varphi) \qquad \text{ou encore}$$

$$u=\left(Ar^k+\frac{B}{r^{k+1}}\right)P_k(\sin\varphi)$$

A et B étant des constantes.

Comme $P_0(t)=1$, $P_1(t)=t$, $P_2(t)=\frac{1}{2}(3t^2-1)$,

$$u=\left(\mathrm{Ar}+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{r}^2}\right)\sin\varphi$$

$$u=\frac{1}{2}\left(Ar^2+\frac{B}{r^3}\right)(3\sin^2\varphi-1).$$

Si $B\neq 0$, ces fonctions sont discontinues à l'origine.

Si $B=0$, on obtient en revenant aux variables x, y, z des polynômes harmoniques.

Par exemple pour $k=2$, en prenant $A=2$,

$$u=r^2(3\sin^2\varphi-1)=2z^2-x^2-y^2.$$

A un coefficient près, le polynôme harmonique de degré k ainsi obtenu s'écrit :

$$Q_k(x,y,z)=r^k P_k\left(\frac{z}{r}\right)$$

avec $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Il s'ensuit évidemment que toute série convergente

$$u=\sum_0^{+\infty}\alpha_k r^k P_k\left(\frac{z}{r}\right)$$

est encore une fonction harmonique. Ceci est à rapprocher de l'exercice 2 du chapitre précédent, où on a développé en série de polynômes de Legendre une somme de potentiels newtoniens.

• Revenons brièvement à n entier quelconque, en prenant $\alpha=k$ entier $\leqslant n$.

L'équation différentielle donnant $H(t)$ est

$$(1-t^2)H''-2tH'+\left[k(k+1)-\frac{n^2}{1-t^2}\right]H=0 \qquad (33)$$

On peut vérifier, au moyen du changement de fonction inconnue $H(t)=(1-t^2)^{\frac{n}{2}}z(t)$, et de la formule de Leibniz, que cette équation admet pour solution particulière

$$P_k^n(t)=(1-t^2)^{\frac{n}{2}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}P_k(t)$$

fonction appelée **fonction de Legendre associée** ou **fonction sphérique.**

On obtient ainsi de nouvelles fonctions harmoniques élémentaires de la forme

$$u=r^k(a\sin n\theta+b\cos n\theta)P_k^n(\sin\varphi)$$

où k et n sont entiers positifs, $k\geqslant n$.

4. Équation des ondes

Elle généralise l'équation des cordes vibrantes et s'écrit

$$\boxed{\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}$$

Elle régit, en particulier, les mouvements d'un gaz compressible au voisinage d'une position d'équilibre, u étant le potentiel des vitesses, c la vitesse du son dans le gaz. Nous examinerons seulement deux formes de solutions.

a) En séparant les variables sous la forme $u = f(x)\, g(y)\, h(z)\, \varphi(t)$, on a aussitôt $\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} + \frac{h''}{h} - \frac{1}{a^2}\frac{\varphi''}{\varphi} = 0$ d'où $\frac{\varphi''}{\varphi} = \text{constante}$, par exemple $\frac{\varphi''}{\varphi} = -\omega^2$ et $\frac{f''}{f}, \frac{g''}{g}, \frac{h''}{h}$ sont aussi des constantes que l'on peut prendre également négatives, $-\omega_1^2$, $-\omega_2^2$, $-\omega_3^2$, avec $\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$, on a alors les solutions

$$u = (a_1 \sin \omega_1 x + b_1 \cos \omega_1 x)\,(a_2 \sin \omega_2 y + b_2 \cos \omega_2 y)\,(a_3 \sin \omega_3 z + b_3 \cos \omega_3 z)\,(a \sin \omega t + b \cos \omega t).$$

b) Si nous supposons que le gaz est enfermé dans un récipient sphérique de rayon R et de centre O et qu'il vibre par couches sphériques de centre O, la solution $u(x, y, z, t)$ sera fonction de t et de $OM = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et de plus soumise aux conditions suivantes :

— conditions aux limites : la vitesse, pour tout t, s'annule pour $r = R$;

— conditions initiales : on donne la vitesse du gaz et sa pression en chaque point pour $t = 0$; on admettra que cette pression est proportionnelle à $\frac{\partial u}{\partial t}$ donc on donne $\frac{\partial u}{\partial t} = p(r)$ fonction donnée de r, pour $t = 0$.

Comme la vitesse en un point est $\overrightarrow{\text{grad}\, u}(M) = \overrightarrow{\text{grad}\, u}(r) = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$ (calcul classique), on aura $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ pour $r = R$, $\forall t$, et par exemple $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ pour $t = 0$, $\forall r$, si nous prenons la vitesse initiale du gaz nulle en chaque point.

Cherchons des solutions à variables séparées $u(r, t) = f(r)\, g(t)$, on a, t étant constant dans le calcul de Δu

$$\Delta u = \text{div}\,(\overrightarrow{\text{grad}\, u}) = g(t)\ \text{div}\left(\frac{\overrightarrow{OM}}{r} f'(r)\right)$$

Or on sait, d'après un exercice du tome 2, et on retrouve facilement, que

$$\operatorname{div}(\varphi(M)\,\vec{V}(M)) = \vec{V}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}\,\varphi} + \varphi\cdot\operatorname{div}\vec{V}$$

donc $$\Delta u = g(t)\left[\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\frac{f'(r)}{r}\right)+\frac{f'(r)}{r}\operatorname{div}\overrightarrow{OM}\right]$$

Comme $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\operatorname{div}\overrightarrow{OM} = 3$

et $$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\frac{f'(r)}{r}\right) = \frac{\overrightarrow{OM}}{r}\cdot\left(\frac{f'(r)}{r}\right)'$$

donc $$\Delta u = g(t)\left[r\left(\frac{f'(r)}{r}\right)'+3\,\frac{f'(r)}{r}\right] = \frac{g(t)}{r}\,[rf''(r)+2f'(r)].$$

Or $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(r)\,g''(t)$, l'équation donnant f et g est donc

$$\frac{g(t)}{r}\,[rf''(r)+2f'(r)] = \frac{1}{a^2}\,f(r)\,g''(t)$$

soit $\dfrac{f''}{f}+\dfrac{2}{r}\dfrac{f'}{f} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{g''}{g} = \text{constante}$, que nous prenons égale à $-\omega^2$.

Il en résulte

$$g(t) = \lambda \sin a\omega t + \mu \cos a\omega t$$

$f(r)$ étant solution de $rf''+2f'+\omega^2 rf = 0$, ou $(rf)''+\omega^2 rf = 0$

On a donc $f(r) = \dfrac{1}{r}(A \sin \omega r + B \cos \omega r)$, et les solutions possibles

$$u = \frac{\lambda \sin a\omega t + \mu \cos a\omega t}{r}(A \sin \omega r + B \cos \omega r).$$

u devant rester fini en 0, il faut que $B = 0$.

$\dfrac{\partial u}{\partial r} = 0$ pour $r = R$ donne $f'(R)\,g(t) = 0$, $\forall t$, donc $f'(R) = 0$,

or $$f(r) = A\,\frac{\sin \omega r}{r},\quad F'(r) = A\cdot\frac{\omega r \cos \omega r - \sin \omega r}{r^2}$$

il faut donc $$\omega R \cos \omega R - \sin \omega R = 0$$

donc ω ne peut être quelconque : il faut que ωR soit racine de l'équation $\operatorname{tg} z = z$. Cette équation fait l'objet de l'exercice 3 du chapitre Fonctions d'une variable complexe, elle n'a que des racines réelles et elle a une infinité de racines positives $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$.

On trouve donc les solutions élémentaires

$$u_n = (\lambda_n \sin a\omega_n t + \mu_n \cos a\omega_n t)\,\frac{\sin \omega_n r}{r}$$

avec $\omega_n = \frac{\alpha_n}{R}$, α_n étant la $n^{\text{ième}}$ racine positive de l'équation tg z et aussi, sous réserve de convergence :

$$u = \lambda_0 + \frac{1}{r} \sum_{1}^{+\infty} \sin \omega_n r (\lambda_n \sin a\omega_n t + \mu_n \cos a\omega_n t)$$

Pour r fixé comme pour t fixé, cette série, sans être une série de Fourier, s'y apparente pour n très grand car $\alpha_n = \frac{\pi}{2} + n\pi - \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ pour $n \longrightarrow \infty$ (voir exercice cité). Il reste à tenir compte des conditions initiales : $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ pour $t = 0$ donne $\mu_n = 0$, $\forall n$.

Il reste $u = \lambda_0 + \frac{1}{r} \sum_{1}^{+\infty} \lambda_n \sin a\omega_n t \sin \omega_n r$

$\frac{\partial u}{\partial t} = p(r)$ pour $t = 0$ donne, en admettant la dérivation terme à terme

$$\left[\frac{1}{r} \sum_{1}^{+\infty} a\omega_n \lambda_n \cos a\omega_n t \sin \omega_n r \right]_{t=0} = p(r)$$

soit

$$\sum_{1}^{+\infty} \omega_n \lambda_n \sin \omega_n r = \frac{r}{a} p(r)$$

Or bien que la série du premier membre ne soit pas une série de Fourier proprement dite, il est possible de calculer ses coefficients par identification, car on peut établir que les fonctions sin $\omega_n r$ sont deux à deux orthogonales (avec la densité 1) sur $[0, R]$ (voir exercice à la fin de ce chapitre) et qu'ainsi on peut développer $\frac{r}{a} p(r)$ sous la forme $\sum_{1}^{+\infty} \beta_n \sin \omega_n r$, les β_n étant calculables, connaissant la **norme** de sin $\omega_n r$.

On obtient ainsi $u = \lambda_0 + \frac{1}{r} \sum_{1}^{+\infty} \frac{\beta_n}{\omega_n} \sin a\omega_n t \sin \omega_n r$.

5. Équations de Maxwell. Équation des télégraphistes

On démontre que la propagation simultanée, dans le vide, d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{H}$ satisfait aux équations dites de Maxwell :

$$\text{rot } \vec{H} = \lambda \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$
$$\text{div } \vec{H} = 0, \quad \text{div } \vec{E} = 0$$

où λ et μ sont deux constantes.

Dans un repère orthonormé, les équations de Maxwell constituent un système de huit équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre à quatre variables, portant sur six fonctions inconnues qui sont les composantes de $\vec{H}$ et $\vec{E}$ au point $M(x, y, z)$ à l'instant t. Nous n'étudierons pas ce système.

Les équations de Maxwell se compliquent lorsque le milieu de propagation n'est pas le vide. Dans le cas d'un câble électrique, les variables spatiales x, y, z se réduisent à une seule et on démontre qu'avec des notations convenables le potentiel électrique $u(x, t)$ au point d'abscisse x du câble, à l'instant t, est solution d'une équation de la forme

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\alpha\frac{\partial u}{\partial t}-(\alpha^2-1)\,u=0} \tag{34}$$

appelée équation des télégraphistes.

Cette équation se rattachant à une forme plus générale, linéaire à coefficients constants par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées partielles premières et secondes, peut se simplifier par un changement de fonction inconnue $u(x, t)=e^{kt}z(x, t)$, k étant une constante.

En effet
$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{kt}\frac{\partial z}{\partial u},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{kt}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=ke^{kt}z+e^{kt}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=k^2\,e^{kt}z+2\,ke^{kt}\frac{\partial z}{\partial t}+e^{kt}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

de sorte que $(34) \iff \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}-2(k+\alpha)\dfrac{\partial z}{\partial t}+[1-(k+\alpha)^2]\,z=0$

En prenant $k=-\alpha$, cette équation se simplifie et devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+z=0 \quad \text{avec } u=e^{-\alpha t}z \tag{35}$$

Nous allons en trouver diverses solutions, plus ou moins utilisables, suivant les conditions initiales et aux limites.

a) Par analogie avec l'équation des cordes vibrantes, posons $\alpha=x+t$, $\beta=x-t$, z devient fonction de α, β,

et
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}+\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)\right)^{(2)},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\left(\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}-\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)\right)^{(2)}$$

$$(35) \iff 4\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\,\partial \beta}+z=0 \tag{36}$$

Cherchons une solution fonction du produit $\alpha\beta$:

$$z=\varphi(\omega), \quad \text{avec } \omega=\alpha\beta$$

$$\frac{\partial z}{\partial\alpha}=\varphi'(\omega)\,\beta, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\partial\beta}=\varphi'(\omega)+\varphi''(\omega)\,\omega$$

$$(36) \Longrightarrow 4\,\omega\varphi''(\omega)+4\,\varphi'(\omega)+\varphi(\omega)=0 \qquad (37)$$

Transformons cette équation par la transformation de Laplace, en posant $\varphi(\omega)\supset\Phi(p)$, donc $\varphi'(\omega)\supset p\Phi(p)-\varphi(0)$

$$\varphi''(\omega)\supset p^2\,\Phi(p)-p\varphi(0)-\varphi'(0)$$

$$\omega\varphi''(\omega)\supset -2\,p\Phi(p)-p^2\,\Phi'(p)+\varphi(0)$$

$$(36)\supset -4\,p^2\Phi'(p)-4\,p\Phi(p)+\Phi(p)=0$$

d'où $$\frac{\Phi'}{\Phi}=-\frac{1}{p}+\frac{1}{4\,p^2}, \quad \Phi(p)=\frac{k}{p}\,e^{-\frac{1}{4p}}.$$

Or nous avons vu dans l'exercice 2 du chapitre Fonctions de Bessel que $\frac{1}{p}\,e^{-\frac{1}{4p}}\subset J_0(\sqrt{t})$, il en résulte avec nos notations que (37) admet la solution $\varphi(\omega)=J_0(\sqrt{\omega})$, (34) admet donc la solution $u(x,\,t)=e^{-\alpha t}\,J_0(\sqrt{x^2-t^2})$.

Remarquons que, vu la parité du développement de J_0 en série entière, cette solution reste réelle même si $x^2-t^2<0$.

b) Cherchons des solutions de (35) par séparation des variables.

$z=f(x)\,g(t)$ conduit à $\frac{f''}{f}=\frac{g''}{g}-1=\text{constante}$.

Prenons par exemple $\frac{g''}{g}=-\omega^2$, $\frac{f''}{f}=-\omega^2-1=-\lambda^2$, on obtient les solutions particulières $g(t)=e^{i\omega t}$, $f(x)=e^{-i\lambda x}$ et $z=e^{i(\omega t-\lambda x)}=e^{i\omega\left(t-\frac{x}{k}\right)}$ en posant $\frac{\omega}{k}=\lambda$, donc $k=\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+1}}$

d'où $$u=e^{+i\omega\left(t-\frac{x}{k}\right)}$$

Revenons à z et observons que, vu la continuité possible de ω, une intégrale de Fourier $z(x,\,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)\,e^{i\omega\,t-\frac{x}{k}}\,d\omega$ sera encore solution de (35) pourvu que deux dérivations successives sous le signe $\int$ soient justifiées; il suffit pour cela que les trois intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(\omega)|\,d\omega$, $\int_{-\infty}^{+\infty}|\omega\varphi(\omega)|\,d\omega$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\,|\varphi(\omega)|\,d\omega$ soient convergentes.

Cherchons alors une solution de (34) qui, pour $x=0$, se réduise à une fonction donnée $h(t)$: $u(0, t)=h(t) \iff z(0, t)=e^{\alpha t} h(t)$

on veut donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = e^{\alpha t} h(t)$.

Il en résulte d'après les formules de réciprocité de Fourier, et sous réserve de convergence, $\varphi(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha t} h(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$.

On obtient ainsi la solution :

$$u(x, t)=e^{-\alpha t}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega)\, e^{i\omega\left(t-\frac{x}{k}\right)}\, d\omega$$

Cette méthode est évidemment valable si $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha t}|h(t)|\, dt$ est convergente.

6. Équation de la chaleur

On démontre que dans un milieu de dimension 3, sans source calorifique, la température u à l'instant t en un point (x, y, z) est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\boxed{\Delta u - \lambda^2 \frac{\partial u}{\partial t}=0}$$

Il y a, là encore, de nombreuses méthodes de recherche de solutions élémentaires, nous citerons seulement celle qui conduit à utiliser les polynômes d'Hermite, dans le cas particulier d'un milieu à une seule coordonnée, c'est-à-dire d'une tige rectiligne.

L'équation se réduit à $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda^2 \frac{\partial u}{\partial t}=0}$ (38)

des solutions $u=f(x)\, g(t)$ doivent satisfaire à

$$\frac{f''}{f}=\lambda^2 \frac{g'}{g}=\text{constante}$$

Prenons cette constante égale à α^2, on obtient les solutions particulières $f(x)=e^{\alpha x}$, $g(t)=e^{\frac{\alpha^2}{\lambda^2} t}$, d'où

$$u = e^{\alpha n + \frac{\alpha^2}{\lambda^2} t} \tag{39}$$

Vu la linéarité, les fonctions $\varphi_n(x, t)$, coefficients du développement en série entière de u, suivant la variable α, seront encore des solutions. On peut rapprocher (39) de la fonction génératrice des polynômes d'Hermite :

on sait que $e^{2\nu z - \nu^2}=\sum_{0}^{+\infty} \frac{\nu^n}{n!} H_n(z)$

Or (39) s'écrit $u = e^{x\alpha - \left(\frac{\sqrt{-t}}{\lambda}\right)^2 \alpha^2}$.

En posant $v = \frac{\alpha}{\lambda}\sqrt{-t}$, d'où $\alpha = \frac{\lambda v}{\sqrt{-t}}$

on obtient

$$e^{\alpha x + \frac{\alpha^2}{\lambda^2} t} = e^{-v^2 + \frac{\lambda x}{\sqrt{-t}} v} = \sum_0^{+\infty} \frac{v^n}{n!} H_n\left(\frac{\lambda x}{2\sqrt{-t}}\right)$$

$$= \sum_0^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{\sqrt{-t}}{\lambda}\right)^n H_n\left(\frac{\lambda x}{2\sqrt{-t}}\right)$$

On obtient donc une suite de solutions de (38) sous la forme :

$$\varphi_n(x, t) = \left(\frac{\sqrt{-t}}{\lambda}\right)^n H_n\left(\frac{\lambda x}{2\sqrt{-t}}\right)$$

t étant positif, $\sqrt{-t}$ est imaginaire pur, mais les H_n étant des polynômes de la parité de n, $\varphi_n(x, t)$ est une fonction réelle quel que soit l'entier n. Il va de soi que l'on peut encore écrire une infinité de solutions sous forme de séries convergentes $\sum_0^{+\infty} C_n \varphi_n(x, t)$.

7. Conclusion

On voit sur ces quelques exemples l'extrême diversité des méthodes que peuvent mettre en œuvre les équations aux dérivées partielles, et aussi l'extraordinaire complexité de l'étude des cas généraux de ces équations. Étant donné le caractère très varié des paragraphes qui précèdent, nous ne donnerons qu'un nombre très limité d'exercices, la plupart sans solutions détaillées.

Résumé du chapitre 7

- On appelle **intégrale première d'un système différentiel**

$$\begin{cases} x' = f(x, y, z, t) \\ y' = g(x, y, z, t) \\ z' = h(x, y, z, t) \end{cases}$$

une fonction $F(x, y, z, t)$ qui, le long d'une courbe intégrale du système, garde une valeur constante.

Les courbes intégrales sont définies par trois intégrales premières indépendantes.

• **A l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre :**

$$f(x, y, z, u)\frac{\partial u}{\partial x}+g(x, y, z, u)\frac{\partial u}{\partial y}+h(x, y, z, u)\frac{\partial u}{\partial z}=\varphi(x, y, z, u) \quad (1)$$

on peut associer le système différentiel caractéristique :

$$\frac{dx}{f}=\frac{dy}{g}=\frac{dz}{h}=\frac{du}{\varphi} \quad (2)$$

La solution générale de (1) est définie par $\Phi(F_1, F_2, F_3)=0$, où F_1, F_2, F_3 sont trois intégrales premières de (2), indépendantes.

• Pour une **équation aux dérivées partielles à deux variables,** le problème de Cauchy consiste à trouver une surface intégrale passant par une courbe donnée.

• **L'équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre :**

$$A(x, y)r+B(x, y)s+C(x, y)t+D(x, y, z, p, q)=0$$

(avec les notations de Monge)
est, sur un domaine Δ, de type elliptique si $B^2-4AC<0$
de type hyperbolique si $B^2-4AC>0$
de type parabolique si $B^2-4AC=0$

• **L'équation à coefficients constants** $Ar+Bs+Ct=0$ a pour solution générale $f(x+ay)+g(x+by)$, si a et b sont les racines réelles de l'équation caractéristique $C\alpha^2+B\alpha+A=0$, avec $B^2-4AC>0$; elle a pour solution $xf(x+ay)+g(x+ay)$, avec $a=-\frac{B}{2C}$, si $B^2-4AC=0$; elle se ramène à l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$, si $B^2-4AC<0$.

• **Équations aux dérivées partielles de la physique.**

Méthodes très diversifiées pour tenir compte des conditions initiales et des conditions aux limites : les plus classiques sont la méthode de superposition et la méthode de séparation des variables, pour des équations linéaires.

EXERCICES

■ **1.** Indiquer une méthode générale de recherche des facteurs intégrants de la forme différentielle $\omega=P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$.
Application : facteurs intégrants de $y\,dx-x\,dy$.

Il faut résoudre $Q\frac{\partial\varphi}{\partial x}-P\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\varphi$, par exemple, par la méthode générale du système caractéristique associé.

Une intégrale première s'obtient en résolvant

$$P\,dx+Q\,dy=0 \Longrightarrow y=\varphi(x, C_1),$$

une autre intégrale première s'obtient par

$$\frac{d\varphi}{\varphi}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx=\psi(x, C_1)\,dx.$$

Exemple : on trouve $\varphi=\frac{1}{x^2}f\left(\frac{y}{x}\right)$, fonctions homogènes de degré -2.

■ **2.** Résoudre l'équation aux différentielles totales

$$yz\,dx+x(z-x)\,dy-xy\,dz=0.$$

On vérifie $\vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}=0$.

On doit résoudre $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z-x}{y}$, on obtient $z=x(1+\lambda y)$.

■ **3.** Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$(x-y+z)\,p+(2\,y-z)\,q=z.$$

Solution générale : $F\left(\frac{z^2}{y-z}, \frac{x+y}{z}\right)=0$.

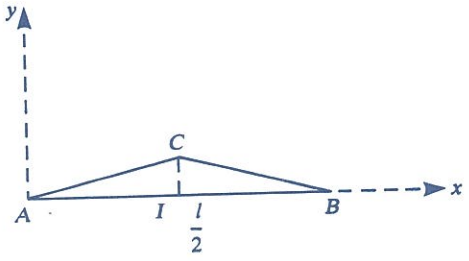
■ **4.** Résoudre l'équation aux dérivées partielles $z=xp+yq-pq$, et déterminer la surface intégrale contenant la parabole $y=0$, $x^2=2z$.

Solution générale : surface développable paramétrée

$$\begin{cases} x=-yf'(\lambda)+f(\lambda)+\lambda f'(\lambda) \\ z=y[f(\lambda)-\lambda f'(\lambda)]+\lambda^2 f'(\lambda) \end{cases}$$

Solution particulière : $(2x+y)^2-8z=0$, cylindre parabolique.

■ **5.** On considère la corde vibrante, de mouvement régi par $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$, abandonnée sans vitesse initiale dans la position tendue suivant la figure ci-dessous, pour $t=0$. On suppose $IC=h$, donné.



Déterminer son mouvement, en utilisant la seconde méthode du paragraphe (*D.* 2).

L'élongation à l'instant t et à la distance x du point A est donnée par la formule :

$$u(x, t)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}$$

obtenue à partir du développement en série de Fourier de la fonction $y=f(x)$ représentant la ligne brisée ACB.

Le lecteur pourra vérifier, en linéarisant les produits ci-dessus, que ce résultat est équivalent à celui que donnerait la première méthode :

$$u(x, t)=\varphi(x+at)+\psi(x-at)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]$$

f étant ici « prolongée » comme fonction impaire de période $2l$; il est alors facile d'obtenir la forme de la corde à l'instant t.

■ **6.** Démontrer (comme suite au paragraphe (*D.* 5)), l'orthogonalité sur $[0, R]$ de la famille de fonctions $f_n(r)=\sin\omega_n r$, les ω_n étant définis par $\omega_n=\frac{\alpha_n}{R}$, $\operatorname{tg}\alpha_n=\alpha_n$. Calculer en fonction de α_n la norme de $f_n(r)$ dans le produit scalaire ainsi défini.

Par un changement de variable on est ramené à vérifier que :

$$\int_0^1 \sin\alpha_k t\sin\alpha_n t\,\mathrm{d}t=0,\quad \text{si } \alpha_k\neq\alpha_n,\quad \alpha_k=\operatorname{tg}\alpha_k,\quad \alpha_n=\operatorname{tg}\alpha_n.$$

Le calcul est immédiat.

$$\|f_n(r)\|^2=\int_0^R \sin^2\omega_n r\,\mathrm{d}r=R\int_0^1 \sin^2\alpha_n t\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\|f_n(r)\|^2=\frac{R}{2}\frac{\alpha_n^2}{1+\alpha_n^2}.$$

On constate que $\|f_n(r)\|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{R}{2}$, puisque $\alpha_n \longrightarrow +\infty$.

■ **7.** Résoudre l'équation $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}+\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}-2\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=0.$

On pose $\dfrac{\partial z}{\partial x}=u$, on obtient $z=f(x+y)+g(2x-y)+h(y)$.

■ **8.** Résoudre l'équation $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

a) par le changement de variables $x = e^u$, $y = e^v$;

b) par le changement de variables $xy = t$, $\frac{y}{x} = \omega$.

On obtient $z = f(xy) + g\left(\frac{y}{x}\right)$.

■ **9.** On considère une sphère S de centre O, de rayon R, et un point A extérieur à S, tel que $OA = a$. On suppose que la densité μ d'un point M de la sphère est fonction seulement de la distance $OM = \rho$, et que tout point M de la sphère, de masse dm, est soumis au potentiel newtonien $\frac{dm}{r}$, avec $r = AM$.

Calculer le potentiel total U de la sphère.

$U = \iiint_S \frac{dm}{r} = \iiint_S \frac{\mu(\rho)}{r} \rho^2 \cos\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$ en coordonnées sphériques,

$$r = \sqrt{a^2 + \rho^2 - 2c\rho \sin\varphi}$$

On obtient $U = \frac{m}{a}$, si m est la masse totale de la sphère.

■ **10.** Résoudre l'équation $xp + 3yq = 4\frac{y^2}{x^2}$, et trouver la surface intégrale qui contient la parabole $x = 1$, $z = y^2 - y$.

Solution générale : $z = \frac{y^2}{x^2} + f\left(\frac{y}{x^3}\right)$.

Surface intégrale demandée : $z = \frac{xy^2 - y}{x^3}$.

Imprimerie Bayeusaine, 8-12, rue Royale, 14401 Bayeux
Dépôt légal : novembre 1983
N° d'imprimeur : 5438 - N° de chemise : 6208
Imprimé en France

L'enseignement des Mathématiques a beaucoup évolué durant les deux dernières décennies. Un formalisme plus rigoureux, des concepts plus généraux et de ce fait souvent plus abstraits se sont imposés. Il demeure cependant un domaine où une attention toute particulière doit être apportée à la pédagogie des mathématiques, c'est celui des enseignements à finalité technique. Dans de tels cas, l'axiomatique rigoureuse, le concept général et abstrait cèdent nécessairement le pas au souci de doter l'élève des moyens utiles à faire rapidement usage d'un certain nombre « d'outils mathématiques » lui permettant d'appréhender, par le biais de modèles appropriés, les notions techniques qui constituent l'essentiel de sa formation. Aussi les auteurs ont-ils opté pour un formalisme restreint, sans pour autant prendre des libertés quant à la rigueur.

Ce tome 3 d'analyse aborde les compléments généralement traités au niveau du second cycle tant des écoles d'ingénieurs que de l'université, des Mathématiques de la Physique et de la technique : fonctions eulériennes, transformations de Laplace et de Fourier, fonctions de Bessel, fonctions spéciales, équations aux dérivées partielles, fonctions d'une variable complexe, etc.

Il s'adresse aux étudiants des écoles supérieures techniques, des I.U.T. et aux élèves de certaines écoles d'ingénieurs — celles en particulier pour lesquelles le passage traditionnel par les classes de mathématiques spéciales n'est pas requis — ainsi qu'aux étudiants du premier cycle universitaire.

ISBN : 2-7042-1088-8

115 F